

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД  
«ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА  
ШЕВЧЕНКА»

Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій

Кафедра математики та інформатики

Демешко Галина Миколаївна


**МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ У  
ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ**


**кваліфікаційна робота**

**здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня**

**освітньої програми «Математика»**

**за спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика)**

Особистий підпис  Галина ДЕМЕШКО

Науковий керівник  Юрій ЖУЧОК,  
доктор фізико-математичних наук,  
професор кафедри математики та  
інформатики.

В.о. завідувача кафедри \_\_\_\_\_ Юрій КОЗУБ,  
доктор технічних наук, професор  
кафедри математики  
та інформатики

Полтава – 2024

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП .....</b>	<b>3</b>
<b>РОЗДІЛ 1. МІСЦЕ ТЕОРІЇ МНОГОЧЛЕНІВ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ .....</b>	<b>6</b>
1.1. Теоретичні відомості з алгебри многочленів .....	6
1.2. Аналіз діючих програм та шкільних підручників з математики для основної та старшої школи з теми дослідження .....	11
1.3. Многочлени в учнівських олімпіадах з математики .....	20
<b>РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ.....</b>	<b>26</b>
2.1. Особливості навчання учнів елементів теорії многочленів у школі .....	26
2.2. Аналіз типових помилок, що допускають учні при розв'язуванні задач на многочлени .....	32
2.3. Методичні рекомендації щодо розв'язування практичних завдань з алгебри многочленів .....	36
<b>РОЗДІЛ 3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА ОСНОВНИХ ПОЛОЖЕНЬ ДОСЛІДЖЕННЯ .....</b>	<b>42</b>
3.1. Методика проведення педагогічного експерименту .....	42
3.2. Аналіз результатів педагогічного експерименту .....	44
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>51</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>	<b>52</b>
<b>ДОДАТКИ .....</b>	<b>58</b>

## ВСТУП

Теорія многочленів займає важливе місце у шкільному курсі алгебри як основної, так і старшої школи. Систематичне вивчення многочленів починається з 7 класу. Питання з теорії многочленів, такі як ділення многочленів «кутом», методом невизначених коефіцієнтів, теорема Безу та наслідки з неї, узагальнена теорема Вієта, схема Горнера, застосування многочленів до розв'язування алгебраїчних рівнянь вищого порядку, розглядаються у профільних математичних класах старшої школи. Многочлени відіграють величезну роль в алгебрі, математичному аналізі, аналітичній геометрії, теорії кодування, теорії графів наближених обчисленнях тощо; за допомогою многочленів можна описати реальні явища та процеси.

Проте, вивчення теми «Многочлени» викликає багато труднощів в учнів, починаючи з основної школи (застосування формул скороченого множення, розклад многочленів на множники тощо), які залишаються навіть у старшій школі. Складність сприйняття матеріалу учнями ставить перед учителем завдання пошуку нових методичних прийомів організації навчальної діяльності та розробки методичних рекомендацій, які б сприяли б кращому засвоєнню алгебри многочленів у старшій школі.

Методичні особливості організації навчання математики у старшій школі, у тому числі і вивчення теорії многочленів, досліджувалися у роботах Г.П. Бевза [6], Л.В. Ізюмченко [19], І.В. Лов'янової [27], Є.П. Неліна, В.В. Нічишиної [19], Р.Я. Ріжняка [19], З.І. Слєпкань [48], Н.А. Тарасенкової [55], З.П. Халецької [56], Т.М. Хмари, В.О. Швеця, М.І. Шкіля, В.А. Ясінського [60] та інших. Останнім часом з'являється все більше магістерських робіт [42; 51; 59], присвячених проблемі вивчення многочленів у старшій школі, які стосуються переважно розгляду змістового наповнення теми. Проте, наявних сучасних досліджень щодо розробки

методичних рекомендацій вивчення теми «Многочлени» у старшій профільній школі є недостатньо.

Саме тому, дослідження методики вивчення многочленів у шкільному курсі алгебри є цілком актуальною темою.

**Об'єкт дослідження** – процес вивчення алгебри в основній та старшій профільній школі.

**Предмет дослідження** – методичні аспекти навчання старшокласників теорії многочленів.

**Мета дослідження** – розробити, обґрунтувати та експериментально перевірити методичні особливості вивчення многочленів у старшій профільній школі.

**Гіпотеза дослідження** – представлені у дослідженні методичні рекомендації щодо вивчення многочленів у старшій школі сприятимуть ефективному та результативному засвоєнню навчального матеріалу та його подальшому застосуванню при розв'язуванні практичних завдань.

**Наукова новизна** дослідження полягає у тому, що в роботі обґрунтовано деякі нові методичні підходи до вивчення многочленів у старшій профільній школі.

**Практичне значення роботи** – результати проведеного дослідження можуть бути використані вчителями математики, студентами у процесі їх професійної діяльності.

Відповідно до мети та гіпотези дослідження поставлено наступні **завдання**:

- 1) проаналізувати навчальну, психолого-педагогічну та методичну літературу за темою дослідження;
- 2) розглянути основні теоретичні відомості з алгебри многочленів, які доцільно вивчати у шкільному курсі математики;
- 3) провести аналіз навчальних програм та діючих шкільних підручників з основної та старшої школи відповідно до теми дослідження;

- 4) продемонструвати на прикладах застосування многочленів при розв'язуванні олімпіадних задач;
- 5) дослідити методичні особливості вивчення многочленів у шкільному курсі алгебри;
- 6) проаналізувати типові помилки, які допускають учні при розв'язуванні задач на застосування многочленів;
- 7) розробити методичні рекомендації щодо формування в учнів навичок та умінь при розв'язуванні практичних завдань з алгебри многочленів;
- 8) перевірити основні положення дослідження у процесі проведення педагогічного експерименту;
- 9) підібрати матеріали для проведення педагогічного експерименту, зокрема розробити уроки з теми «Многочлени» для учнів 10 класу (профільний рівень).

При вирішенні завдань застосовувалися наступні **методи дослідження**:

- педагогічний експеримент;
- анкетування вчителів математики;
- педагогічне спостереження за процесом навчання та діяльністю учнів;
- порівняльний і системний аналіз та узагальнення джерел за проблематикою дослідження;
- вивчення та аналіз досвіду відомих психологів та педагогів з питань навчання учнів старшої школи та вивчення теорії многочленів.

*Структура і об'єм магістерської роботи:* робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаної літератури та додатків. Зміст роботи викладений на 78 сторінках друкованого тексту, у списку використаних джерел 60 найменувань.

## РОЗДІЛ 1. МІСЦЕ ТЕОРІЇ МНОГОЧЛЕНІВ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ

### 1.1. Теоретичні відомості з алгебри многочленів

Теорія многочленів – важливий розділ алгебри, який має широкий спектр застосувань не лише у математичній науці, але й в інших галузях наукового знання.

Розглядаючи теоретичні відомості з алгебри многочленів з однією змінною будемо подавати лише ту інформацію, яка може бути використана у шкільному курсі математики.

**Означення 1.1.** Вираз виду  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , де  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  – довільні дійсні числа називається многочленом  $n$ -го степеня від однієї змінної. Числа  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  називають коефіцієнтами,  $a_n$  – коефіцієнт при старшому члені,  $a_0$  – вільний член многочлена [19].

Нехай задано два многочлени  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  та  $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ .

**Означення 1.2.** Два многочлени є тотожно рівними, якщо набувають однакових значень для всіх значень змінної.

Розглянемо операції (дії) над многочленами [11] (див. табл 1.1).

Таблиця 1.1.

#### Операції над многочленами

Операція	Аналітичний запис
Сума многочленів	$P(x) + Q(x) = (a_k + b_k)x^k + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$ , де $k = \max\{n; m\}$
Різниця многочленів	$P(x) - Q(x) = (a_k - b_k)x^k + \dots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$ , де $k = \max\{n; m\}$
Добуток многочленів	$P(x) \cdot Q(x) = c_{n+m}x^{n+m} + \dots + c_k x^k + \dots + c_1 x + c_0$ , де $c_k = a_k b_0 + \dots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k$

Операцію ділення многочлена на многочлен розглянемо окремо.

Якщо для двох многочленів  $P(x)$  та  $Q(x)$  можна знайти многочлен  $F(x)$  такий, що  $P(x) = F(x) \cdot Q(x)$ , то вважається, що многочлен  $P(x)$  ділиться на многочлен  $Q(x)$ . У випадку ділення одного многочлена на інший з остачею справедливою є наступна теорема.

**Теорема 1.1.** Для будь-яких двох многочленів  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  та  $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ , де  $Q(x) \neq 0$  існує єдина пара многочленів  $G(x)$  та  $R(x)$  таких, що

$$P(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

де  $R(x)$  – остача [16].

При діленні многочленів застосовуються: ділення «кутом», метод невизначених коефіцієнтів, а також схему Горнера.

Алгоритм ділення многочлена на многочлен за правилом «кута»:

- 1) упорядкувати члени многочлена за спаданням степенів змінної;
- 2) виконати ділення старшого члена діленого на старший член дільника;
- 3) отриманий результат помножити на дільник і добуток, що утворився відняти від діленого;
- 4) з отриманою різницею повторити знову кроки 1-3 доки не залишиться у остачі нуль або степінь остачі не буде меншим від степеня дільника [18].

Суть методу невизначених коефіцієнтів наступна – необхідно визначити вигляд співмножників, на які розкладається многочлен, причому, коефіцієнти цих співмножників знаходять шляхом множення і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях змінної.

Теоретичною основою даного методу є наступні твердження:

- 1) два многочлени рівні, коли рівні їх коефіцієнти при однакових степенях;

2) довільний многочлен 3-го степеня має хоча б 1 дійсний корінь, а тому його можна представити як добуток лінійного і квадратного співмножників;

3) довільний многочлен 4-го степеня можна подати як добуток двох квадратних тричленів [3].

При діленні многочлена  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  на двочлен  $(x - x_0)$  застосовують метод скороченого ділення або *схему Горнера*. В загальному випадку многочлен ділиться на двочлен з остачею:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x - x_0)(b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0) + r, \text{ причому}$$

справедливими є наступні рекурентні співвідношення для коефіцієнтів  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}$  та остачі  $r$ .

$$b_{n-1} = a_n,$$

$$b_{n-2} = x_0 b_{n-1} + a_{n-1},$$

$$b_{n-3} = x_0 b_{n-2} + a_{n-2},$$

...

$$b_0 = x_0 b_1 + a_1,$$

$$r = x_0 b_0 + a_0.$$

Обчислення по схемі Горнера проводяться в таблиці за правилом [28]:

1) старший коефіцієнт зноситься без змін;

2) кожний наступний коефіцієнт дорівнює сумі  $x_0$  помноженого на попередній знайдений коефіцієнт і коефіцієнт, що стоїть над шуканим.

	$x^n$	$x^{n-1}$		$x^1$	$x^0$
	$a_n$	$a_{n-1}$	...	$a_1$	$a_0$
$x_0$	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	...	$b_0$	$r$
	$x^{n-1}$	$x^{n-2}$		$x^0$	

Розкласти многочлен на множники можна за допомогою:

- винесення за дужки відповідного спільного множника;
- шляхом використання основних формул скороченого множення;



– групування (цей спосіб часто застосовується у поєднанні з винесенням спільного множника за дужки);

– виділення повного квадрата або куба двочлена [24].

Зауважимо, що розклад многочлена на множники є необхідною дією при знаходженні коренів многочлена. Очевидно, що корінь многочлена  $x = x_0$  є тим значенням, при якому заданий многочлен перетворюється в нуль.

У процесі знаходження коренів многочлена часто використовують теорему Безу та наслідки з неї.

**Теорема 1.2 (теорема Безу).** Остача  $r$  від ділення многочлена  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  на двочлен виду  $(x - x_0)$  дорівнює значенню цього многочлена в точці  $x_0$ , тобто  $P(x_0)$  [15].

Важливе практичне значення мають наслідки з теореми Безу [15; 19].

**Наслідок 1.** Якщо число  $x_0$  – корінь рівняння  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , то відповідний многочлен ділиться на двочлен  $(x - x_0)$  без остачі.

**Наслідок 2.** Якщо  $x_1, x_2, \dots, x_n$  різні корені многочлена  $P(x)$ , то  $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot Q(x)$ , де  $Q(x)$  – деякий многочлен.

**Наслідок 3.** Многочлен, що не має дійсних коренів, в розкладі на множники лінійних множників не містить.

Знайти корені многочлена  $n$ -го степеня можна також за допомогою узагальненої теореми Вієта.

**Теорема 1.3 (Узагальнена теорема Вієта).** Якщо  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  корені многочлена  $P(x)$ , то мають місце наступні рівності [11; 19]:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n};$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n};$$

$$x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n};$$

$$x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_k + \dots + x_{n-k+1} \cdot \dots \cdot x_{n-1}x_n = (-1)^k \frac{a_k}{a_n};$$

...

$$x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

З останньої рівності можна зробити важливі висновки, що мають практичне застосування:

1) якщо многочлен  $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  має цілі коефіцієнти і  $a_n = 1$ , то раціональними коренями можуть бути тільки цілі числа, які є дільниками  $a_0$ , тобто вільного члена;

2) для того, щоб  $\frac{p}{q}$ , що є нескоротним дробом, був розв'язком многочлена з цілими коефіцієнтами, необхідно, щоб  $p$  був дільником вільного члена  $a_0$ , а  $q$  – дільником старшого коефіцієнта  $a_n$  [54].

*Зауваження:* пошук коренів многочлена, навіть цілих, часто є достатньо трудомістким процесом і потребує багато часу, в цьому випадку, значно зменшити кількість можливих претендентів на корінь допоможуть підрахунки наступних величин, які неодмінно мають бути цілими числами [54]:

$$1) \frac{f(1)}{x_0-1}; \frac{f(-1)}{x_0+1}; \frac{f(2)}{x_0-2}; \frac{f(-2)}{x_0+2}; \dots \in Z, \text{ де } x_0 - \text{цілий корінь};$$

$$2) \frac{f(1)}{p-q} \in Z; \frac{f(-1)}{p+q} \in Z, \text{ де } \frac{p}{q} - \text{нескоротний дріб}.$$

Отже, розглянуті основні теоретичні відомості з алгебри многочленів можна використовувати у курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи, а також у процесі підготовки учнів до олімпіад та проведення факультативів.

## **1.2. Аналіз діючих програм та шкільних підручників з математики для основної та старшої школи з теми дослідження**

Елементи алгебри многочленів вивчаються протягом всього курсу алгебри основної школи, а пізніше курсу алгебри і початків аналізу старшої школи. Починаючи з 7 класу учні знайомляться з поняттям «многочлен», вчаться виконувати дії з многочленами та розкладати многочлени на множники. У подальшому многочлени активно використовуються при виконанні тотожних перетворень цілих виразів, розв'язуванні рівнянь чи нерівностей, проведенні дослідження властивостей степеневої функції тощо. До того ж, многочлени є математичними моделями реальних процесів, що забезпечують реалізацію прикладної спрямованості математики. Як відомо, у контексті сучасного реформування освіти та відповідно до нового Державного стандарту базової середньої освіти [14] важливим завданням математичної галузі освіти є реалізація прикладної спрямованості у процесі вивчення математики, зокрема через розв'язування задач прикладного характеру та сюжетних задач у яких описуються реальні ситуації, процеси та явища.

Найбільш ґрунтовно многочлени розглядаються у 7, 8, 10 та 11 класах. У 7 класі з многочленами учні знайомляться під час вивчення теми «Цілі вирази». Відповідно до навчальної програми для класів з поглибленим вивченням математики [35] тема «Основи теорії многочленів з однією змінною» вивчаються у 8 класі. У старшій школі многочлени розглядаються у 10 класі (профільний рівень [36]) та 11 класі (поглиблене вивчення математики [37]). Відповідно до концепції профільного навчання [22] поглиблене вивчення математики належить до профільного рівня.

Проаналізуємо змістове наповнення та державні вимоги щодо рівня підготовки школярів, що регламентовані відповідними навчальними програмами з математики [34-37].

Основний зміст навчального матеріалу з даної теми та вимоги до рівня підготовки учнів 7 класу, відповідно до програми з алгебри для 5-9 класів [34], подано у таблицях 1.2., 1.3.

Таблиця 1.2.

**Змістове наповнення навчальної програми з алгебри для 7 класу  
щодо вивчення многочленів**

<b>Зміст навчального матеріалу</b>	<b>Вимоги до рівня підготовки учнів</b>
<b>Тема «Цілі вирази» (30 годин)</b>	
Многочлен. Подібні члени многочлена та їх зведення. Степінь многочлена. Додавання, віднімання і множення многочленів. Розкладання многочленів на множники	<i>Учень/учениця:</i> <i>наводять приклади</i> многочленів; <i>формулюють:</i> означення: многочлена, подібних членів многочлена, степеня многочлена; правила: множення одночлена і многочлена, множення двох многочленів; <i>розв'язують вправи, що передбачають:</i> перетворення добутку одночлена і многочлена, суми, різниці, добутку двох многочленів у многочлен; розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки, способом групування, за формулами скороченого множення та із застосуванням декількох способів; використання зазначених перетворень у процесі розв'язування рівнянь, доведення тверджень

Зміст навчання основних відомостей про многочлени з однією змінною передбачає вивчення наступних тем (таблиця 1.3).

Таблиця 1.3.

**Змістове наповнення навчальної програми з алгебри для 8 класу  
(поглиблене вивчення математики) щодо вивчення многочленів**

<b>Зміст навчального матеріалу</b>	<b>Вимоги до рівня підготовки учнів</b>
<b>Тема «Основи теорії многочленів з однією змінною» (8 годин)</b>	
Ділення многочленів. Корені многочлена і теорема Безу. [Схема Горнера]. Цілі раціональні рівняння	<i>Учень/учениця:</i> <i>формулює</i> означення: подільності многочленів на ціло, кореня многочлена з однією змінною, цілого раціонального рівняння; теорему про ділення з остачею, теорему Безу та наслідки з неї, теорему про цілий корінь цілого раціонального рівняння з цілими коефіцієнтами; <i>доводить</i> теорему Безу та наслідки з неї, теорему про цілий корінь цілого раціонального рівняння з цілими коефіцієнтами; <i>розв'язує вправи, що передбачають:</i> ділення многочленів, використання теореми Безу

Розглянемо питання та вимоги до рівня підготовки старшокласників, що представлені у навчальних програмах для 10-11 класів (див. табл. 1.4, 1.5).

Таблиця 1.4.

**Змістове наповнення навчальної програми з алгебри та початків аналізу для 10 класу (профільний рівень) щодо вивчення многочленів**

<b>Зміст навчального матеріалу</b>	<b>Вимоги до рівня підготовки учнів</b>
<b>Тема «Функції, многочлени, рівняння і нерівності» (36 годин)</b>	
Ділення многочленів. Теорема Безу та наслідки з неї.	<i>Учень/учениця:</i> <i>виконує</i> ділення многочленів з остачею, <i>користується</i> теоремою Безу при розв'язуванні рівнянь та нерівностей.

Таблиця 1.5.

**Змістове наповнення навчальної програми з алгебри та початків  
аналізу для 11 класу (поглиблений курс математики) щодо вивчення  
многочленів**

<b>Зміст навчального матеріалу</b>	<b>Вимоги до рівня підготовки учнів</b>
<b>Тема «Комплексні числа та многочлени» (34 годин)</b>	
Многочлен та його корені. Розклад многочлена на незвідні множники. Кратні корені. Основна теорема алгебри. Теорема Вієта. [Многочлен третього степеня. Рівняння вищих степенів. Формула Кардано.]	<i>Учень (учениця):</i> виконує ділення многочленів з остачею; формулює означення кратного кореня та знаходить його кратність; застосовує теорему Вієта до розв'язування задач. [Многочлен третього степеня. Рівняння вищих степенів. Формула Кардано].

Зауважимо, що теми подані у квадратних дужках не є обов'язковими для вивчення.

Проаналізуємо основні діючі підручники з математики, приділяючи увагу структурі підручника та матеріалу, що міститься в ньому за відповідною темою.

Кожен із розглянутих підручників з алгебри для 7 класу [4; 7; 20; 23; 29; 31; 57] відповідає діючій навчальній програмі з математики. Поняття многочлена означається як «сума декількох одночленів» та вводиться за схемою «приклад  $\rightarrow$  означення  $\rightarrow$  приклад».

У підручнику авторів Тарасенкова Н.А. та інші [4] кожне означення, яке потрібно вивчити взято в червону рамку з надписом «Запам'ятайте!», а всі необхідні правила-алгоритми (зведення подібних доданків, виконання дій над многочленами тощо) також виділені під назвою «Зверніть увагу». Крім стандартного теоретичного матеріалу, передбаченого навчальною програмою, у підручнику присутня рубрика «Дізнайтеся більше», де учні можуть знайти додаткову інформацію про симетричні многочлени, навчитися ділити

многочлен на многочлен кутом, розглянути узагальнені формули скороченого множення для  $a^n - b^n$ , дізнатися про видатних українських математиків тощо. Це є так звана пропедевтика для вивчення многочленів у старшій школі. Повторити основний вивчений теоретичний матеріал з теми та перевірити себе можна шляхом надання відповідей на запитання, що подані наприкінці кожного параграфа у рубриці «Пригадайте головне». Задачі поділені за чотирма рівнями складності: початковий, середній, достатній та високий. Є завдання на повторення та задачі прикладного змісту. Наприклад, одна з прикладних задач має наступне формулювання: «Відомо, що різниця квадратів віку тата семикласниці Іринки та самої дівчинки дорівнює добутку 49 і 25. Знайдіть вік тата і дівчинки» [4, с. 135]. Наприкінці параграфа є контрольні запитання та текстові завдання. Матеріал підручника є доступний для семикласників, задач для самостійного розв'язування достатня кількість.

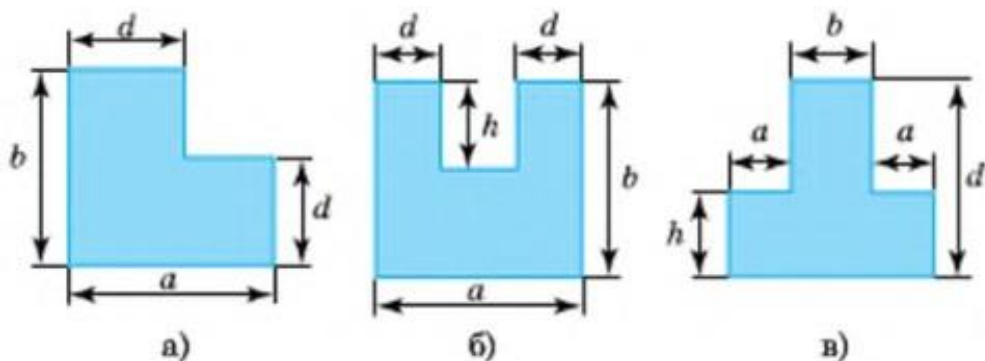
Підручник з алгебри для 7 класу авторів Бевза Г.П. та Бевз В.Г. [7] характеризується досить розширеним поданням матеріалу (весь матеріал теми міститься у двох окремих розділах). Застосування кожне правила детально пояснюється на практиці (рубрика «Виконаємо разом!»). Велика кількість задач різного рівня складності починаючи від усних вправ та закінчуючи завданнями із «\*» дозволить учням більш якісніше відпрацювати свої навички та вміння. Наприкінці розділу є запитання для самоперевірки, інформація про головне в розділі, тестові завдання, задачі для самостійної та контрольної роботи.

У підручнику автора Істера О.С. [20] теоретичний матеріал побудований за принципом «приклад → теорія → розв'язування завдань». Цікавим є формулювання тотожності для суми квадратів у другій книзі «Начал» Евкліда (III ст. до н.е): «Якщо пряма лінія як-небудь розсічена, то квадрат на всій прямій дорівнює квадратам на відрізках разом із двічі узятим прямокутником, що міститься між відрізками» [20, с. 84]. Задачі, що наприкінці кожного параграфа поділені за чотирма рівнями складності. Є також рубрика «Цікаві

задачі для учнів неледачих». Також є завдання на повторення та задачі для домашньої самостійної роботи.

Особливістю підручника з алгебри авторів Кравчука В.Р. та інших [23] є те, що теоретичний матеріал, зокрема правила виконання дій, пояснюються на прикладах, часто без формулювання. Задачний матеріал поділений на усні вправи та завдання трьох рівнів складності (А, Б, В). Є вправи на повторення та більш складні завдання у рубриці «Поміркуйте». Корисним є те, що у підручнику звертається увага на важливість застосування перетворень виразів, що містять многочлени. Зокрема перетворення виразів необхідні для: 1) порівняння значень многочлена з нулем, 2) знаходження найменшого та найбільшого значень виразів, 3) розв'язування задач на подільність.

У підручнику Мальований Ю.І., Литвиненко Г.М., Бойко Г.М. [29] поняття многочлена вводиться на основі розгляду певної геометричної інтерпретації. Зауважимо, що у підручнику крім суто алгебраїчних завдань, застосовуються геометричні на складання відповідних виразів та знаходження їх числового значення. Наприклад, «скласти двома способами вирази для обчислення площ зафарбованих фігур. Довести, що обидва вирази, одержані для кожної фігури, тотожні (рис. 1.1)» [29, с. 65].



**Рис. 1.1. Ілюстрація до задачі на складання многочленів**

Основні означення у підручнику виділені червоним, правила-алгоритми вводяться на основі розв'язування відповідних завдань. Задачі для самостійного розв'язання мають чотири рівні складності, при формулюванні умови деяких завдань наводяться вказівки для попередження помилок учнів.



Наприкінці розділу є достатня кількість різнорівневих завдання для самоперевірки учнями власних досягнень.

Автори підручника з алгебри для 7 класу Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. [31] відразу ж намагаються пояснити сутність поняття «многочлен», шлях введення схеми, що ілюструє зв'язок многочленів з одночленами та числами. Правила дій над многочленами формулюються на основі розглянутих прикладів, кожна дія досить детально пояснюється. Достатня кількість різнорівневих завдань для самостійного розв'язування дозволяє учням активно закріпити новий матеріал на практиці. Позитивним моментом є те, що крім вправ на повторення є ще й завдання для підготовки учнів до вивчення нової теми. Для зацікавлених учнів є рубрика «Учимося робити нестандартні кроки». Наприкінці розділу є блок тестових завдань для самоперевірки, словничок основних понять та правил, цікавий історичний матеріал.

Особливістю іншого підручника автора Цейтліна О.І. [57] є те, що спочатку вводиться означення нового поняття чи правило-алгоритм, а потім дана теорія пояснюється на практиці. Підручник не перевантажений теоретичним матеріалом, лише основні означення та демонстрація їх застосувань на практиці. Задачі мають три рівні складності. Наприкінці розділу окремо виділені завдання підвищеного рівня складності для підготовки учнів до олімпіад з математики.

Проаналізуємо підручник з алгебри (8 клас) для поглибленого вивчення математики [32]. Наприкінці останнього розділу підручника «Квадратні рівняння» розглядається питання про ділення многочленів та застосування теореми Безу. Теоретичний матеріал подається у вигляді означень та теорем. Теорема Безу та її наслідки доводяться. Для позначення многочлена використовується вираз  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . Ділення многочленів здійснюється за алгоритмом їх поділу кутом. Учні пропонується самостійно скласти алгоритм ділення многочленів та реалізувати його за допомогою комп'ютера. Задачний матеріал з теми різноманітний, має 4 рівні складності.

Наведена інформація з теорії многочленів відразу ж застосовується при розв'язуванні цілих алгебраїчних рівнянь.

Проведемо аналіз діючих підручників з алгебри та початків аналізу [1; 2; 8; 21; 39] щодо вивчення многочленів. У підручнику авторів Мерзляк А.Г. та інші [2] подається схожий матеріал, що й у підручнику для 8 класу [32] (поглиблене вивчення математики), тобто розглядається ділення многочленів, теорема Безу та її застосування до розв'язування цілих раціональних рівнянь з цілими коефіцієнтами. Весь матеріал вміщено у один параграф, завдань для самостійного розв'язування дещо менше, ніж у підручнику тих же авторів для 8 класу.

У підручнику авторів Бевз Г.П. та інші [8] з самого початку звертається увага на те, що таке многочлен  $n$ -го степеня з однією змінною. Розгляд питань про ділення многочленів кутом та теорему Безу, її наслідки передуює вивченню методу інтервалів, що є логічно правильним. Як і у попередньому підручнику спочатку вводиться теорія, а потім наводяться відповідні приклади. Різномірних завдань для самостійного розв'язування достатня кількість.

У підручнику [21] після розгляду питань про розв'язування раціональних рівнянь та нерівностей досліджується ще один із важливих інструментів, що застосовується при їх розв'язуванні – ділення многочленів та теорема Безу. Автори підручника подають чітке означення многочлена (полінома)  $n$ -го степеня з однією змінною, кожне твердження, яке необхідно запам'ятати виділяється рамкою. Детально розглядається матеріал щодо розв'язування зведених та незведених алгебраїчних рівнянь із застосування теореми Безу та її наслідків. Практичні завдання спрямовані як на відпрацювання навичок щодо виконання ділення многочленів, так і на розв'язування рівнянь та нерівностей.

Підручник Неліна Є.П. [39] доцільно використовувати у ході змішаного та дистанційного навчання, оскільки теоретичний матеріал подається чітко, обґрунтовано, доступно для учнів, в той же час принцип науковості не порушується. Цей підручник – це начебто велика довідникова схема з

необхідним обґрунтуванням та коментарями до розв'язування завдань. Теоретичний матеріал подається окремими блоками:

- 1) означення многочленів та їх тотожна рівність;
- 2) дії над многочленами, ділення многочлена на многочлен з остачею;
- 3) теорема Безу, корені многочлена, теорема Вієта.

Кожен новий факт пояснюється за допомогою відповідних прикладів, основні твердження доводяться. На відміну від інших проаналізованих підручників для 10 класу, у даному підручнику містяться формули Вієта для загального випадку. Завдання різноманітні, їх достатня кількість. З метою зацікавлення учнів та виявлення їх математичної компетентності автор пропонує підготувати повідомлення про внесок Е. Безу та Ф. Вієта у розвиток математики.

Зважаючи на те, що у класах з поглибленим вивченням математики матеріал про ділення многочленів та застосування теореми Безу вже розглядався у 8 класі, то у 11 класі розгляд питань з алгебри многочленів є логічним продовження теми «Многочлени з однією змінною». У підручнику для 11 класу авторів Мерзляк А.Г. та інші [1] виділяється окремий параграф, що має назву «Многочлени». Першими розглядаються питання про розв'язування рівнянь з від'ємним дискримінантом на множині комплексних чисел, формулюється та доводиться основна теорема алгебри. Пропонується цікава геометрична ілюстрація до доведення основної теореми алгебри, що має назву «Дама із собачкою» (матеріал більше підходить для вищої школи, ніж середньої). Досліджується також питання про кратні корені. Досить детально вивчаються кубічні рівняння, подаються деякі їх властивості, пропонується загальний метод розв'язування – метод Кардано, а також розглядаються відповідні формули Вієта. Повторити основний матеріал з даної теми можна за допомогою рубрики «Головне в параграфі». У підручнику міститься велика кількість завдань підвищеного рівня складності на доведення, розв'язування яких сприяє більш глибокому усвідомленню поняття многочлена та його застосувань.

### 1.3. Многочлени в учнівських олімпіадах з математики

Многочлени широко застосовуються у олімпіадних задачах з математики як самостійна тема, так і апарат, що використовується при розв'язуванні рівнянь та нерівностей.

Аналізуючи різні посібники для підготовки учнів до олімпіад з математики [40; 41; 50; 55; 60] дійшли до висновку, що класичні твердження: теорема Безу, схема Горнера, теорема Вієта часто мають місце при розв'язуванні завдань, що містять многочлени. Особлива увага приділяється різним способам розкладу многочленів на множники, використовуючи при цьому також тотожності:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}), \quad (1.1)$$

$$x^{2m} + y^{2m+1} = (x + y)(x^{2m} - x^{2m-1}y + \dots - xy^{2m-1} + y^{2m}) \quad (1.2)$$

та біном Ньютона:

$$(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + \dots + C_n^{n-1}xy^{n-1} + y^n, \quad (1.3)$$

$$\text{де } C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}, \quad k \in N \text{ [60].}$$

Розглянемо приклад застосування бінома Ньютона.

**Приклад 1.1.** У розкладі многочлена  $(1 + x^2 - x^3)^9$  визначити коефіцієнт при  $x^8$  [50, с. 104].

*Розв'язання.*

Скориставшись формулою бінома Ньютона отримаємо:

$$\begin{aligned} (1 + (x^2 - x^3))^9 = & 1 + C_9^1(x^2 - x^3) + C_9^2(x^2 - x^3)^2 + C_9^3(x^2 - x^3)^3 + \\ & + C_9^4(x^2 - x^3)^4 + \dots + (x^2 - x^3)^9. \end{aligned}$$

Помічаємо, що степінь  $x^8$  міститься лише у четвертому та п'ятому доданках, тому відповідний коефіцієнт буде дорівнювати:

$$3C_9^3 + C_9^4 = 3 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 252 + 126 = 378.$$

*Відповідь:* 378.

Для розкладу многочленів на множники також користуються методом невизначених коефіцієнтів, який продемонструємо на прикладі.

**Приклад 1.2.** Знайти розв'язок рівняння:  $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$ .

*Розв'язання.*

Представимо многочлен 3-го степеня як добуток лінійного і квадратного співмножників, тоді отримаємо наступну рівність (враховуючи, що старший коефіцієнт дорівнює одиниці):

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0 = (x + a)(x^2 + bx + c).$$

Розкриємо дужки в правій частині рівності та згрупуємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0 = x^3 + (a + b)x^2 + (ab + c)x + ac.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях правої та лівої частини, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a + b = 4, \\ ab + c = 5, \\ ac = 2. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь та знайдемо невідомі коефіцієнти:

$$\begin{cases} a + b = 4, \\ ab + c = 5, \\ ac = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 - b, \\ c = 5 - (4 - b)b, \\ (4 - b)(5 - (4 - b)b) = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 - b, \\ c = 5 - (4 - b)b, \\ -b^3 + 8b^2 - 21b + 18 = 0. \end{cases}$$

Коренем рівняння  $-b^3 + 8b^2 - 21b + 18 = 0$  є  $b = 2$ , який знайдено за допомогою підбору. Понизимо степінь многочлена, виконавши ділення «кутом» многочлена  $(-b^3 + 8b^2 - 21b + 18)$  на двочлен  $(b - 2)$ .

$$\begin{array}{r}
 -b^3 + 8b^2 - 21b + 18 \overline{) b - 2} \\
 \underline{-b^3 + 2b^2} \phantom{+ 18} \\
 6b^2 - 21b \\
 \underline{6b^2 - 12b} \\
 -9b + 18 \\
 \underline{-9b + 18} \\
 0
 \end{array}$$

Отже,  $-b^3 + 8b^2 - 21b + 18 = (-b^2 + 6b - 9)(b - 2) = -(b - 3)^2(b - 2)$ .

Якщо  $b = 2$ , то  $a = 1$ ,  $c = 2$ .

Тоді,  $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x + 2)(x^2 + 2x + 1) = (x + 2)(x + 1)^2$ .

Якщо  $b = 3$ , то  $a = 2$ ,  $c = 1$ .

Тоді,  $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x + 2)(x^2 + 3x + 2) = (x + 2)^2(x + 1)$ .

*Відповідь:*  $(x + 2)(x + 1)^2$  та  $(x + 2)^2(x + 1)$ .

У більшості посібників окремо виділяється тема «Квадратний тричлен». Властивості квадратного тричлена застосовують при розв'язуванні олімпіадних задач.

Зокрема, користуються наступною важливою властивістю: значення квадратного тричлена  $ax^2 + bx + c$  при  $x = 1$  рівне сумі його коефіцієнтів, а при  $x = 0$  – відповідному вільному члену [55].

**Приклад 1.3.** Визначити суму коефіцієнтів многочлена  $(x^2 - 2x + 2)^{2023}$ .

*Розв'язання.*

За попередньою розглянутою властивістю значення многочлена при  $x = 1$  дорівнює:  $(1^2 - 2 + 2)^{2023} = 1$ , то і сума отриманих коефіцієнтів при піднесенні до степеня 2023 та зведенні подібних доданків буде дорівнювати одиниці.

*Відповідь:* 1.

Часто розв'язування завдань з многочленами зводиться до застосування елементів теорії чисел (властивостей чисел, подільності тощо). Розглянемо приклад для 11 класу із III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики.

**Приклад 1.4.** Визначити, скільки має бути натуральних значень  $n \leq 2023$  для яких існує многочлен  $P(x)$ , для якого виконується рівність:  $x^{2n} + x^n + 1 = P(x)(x^2 + x + 1)$  ? Відповідь обґрунтувати.

*Розв'язання*

Враховуючи, що за умовою задачі  $x^{2n} + x^n + 1 = P(x)(x^2 + x + 1)$ , то скористаємося різницею кубів:  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ . З цього випливає, що  $x^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 1$ .

Розглянемо більш загальні випадки:

$$1) \ n = 3k: x^{2n} + x^n + 1 = (x^3)^{2k} - 1 + (x^3)^k - 1 + 3 = P(x)(x^2 + x + 1) + 3.$$

Очевидно, що останній вираз не ділиться на многочлен  $(x^2 + x + 1)$ .

$$\begin{aligned} 2) \ n = 3k + 1: x^{2n} + x^n + 1 &= (x^3)^{2k} x^2 + (x^3)^k x + 1 = \\ &= ((x^3)^{2k} - 1)x^2 + x^2 + ((x^3)^k - 1)x + x + 1. \end{aligned}$$

Одержаний вираз ділиться на многочлен  $(x^2 + x + 1)$ .

$$\begin{aligned} 3) \ n = 3k + 2: x^{2n} + x^n + 1 &= (x^3)^{2k} x^4 + (x^3)^k x^2 + 1 = \\ &= ((x^3)^{2k} - 1)x^4 + x^4 + ((x^3)^k - 1)x^2 + x^2 + 1. \end{aligned}$$

Останній вираз ділиться на многочлен  $(x^2 + x + 1)$ , так як  $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ .

Отже, помічаємо, що умову задачі задовольняють всі значення  $n$ , крім тих, при яких  $n \neq 3k$ . Як відомо, чисел кратних 3 та таких, що не перевищують число 2023 існує  $2022 : 3 = 674$ . Тоді, кількість відповідних натуральних чисел дорівнює  $2023 - 674 = 1349$ .

*Відповідь:* 1349.

Іноді при розв'язуванні олімпіадних задач на многочлени застосовується диференціальна або інтегральне числення. Наведемо відповідний приклад

задачі з заочного туру олімпіади механіко-математичного факультету Київського національного університету ім. Т.Г. Шевченка (2015 р.).

**Приклад 1.5.** Знайти кількість коренів многочлена  $P(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - a$  залежно від параметра  $a$  [12].

*Розв'язання.*

Знайдемо похідну заданого многочлена:

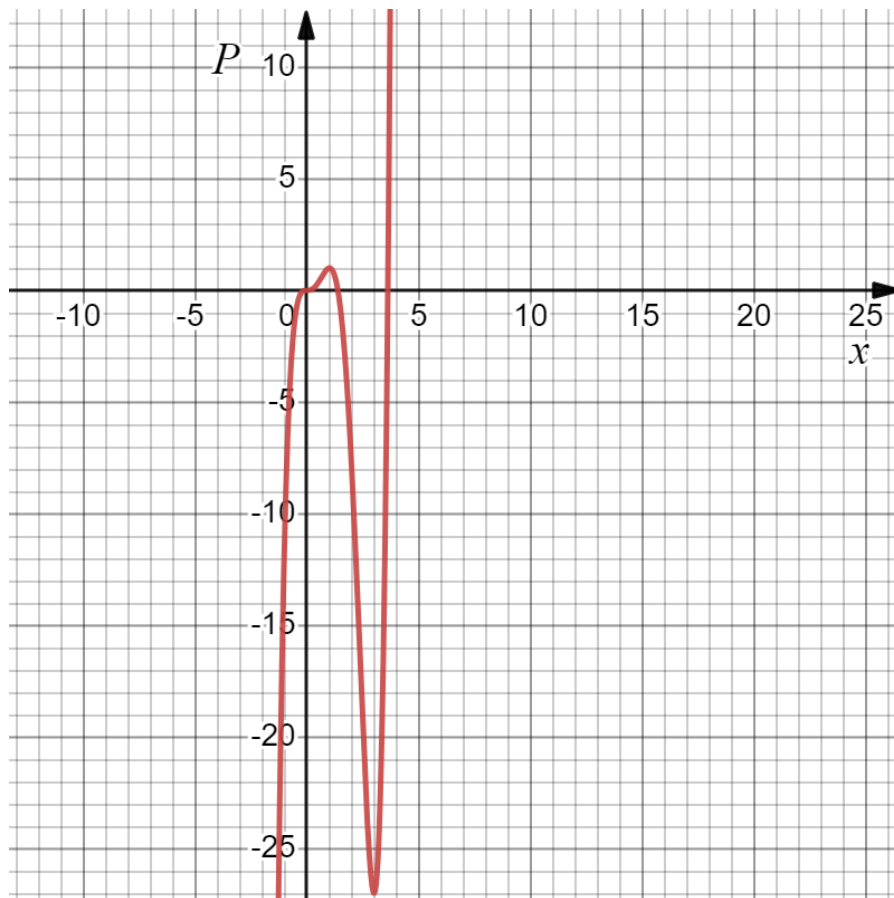
$$P'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 5x^2(x - 3)(x - 1).$$

Досліджуємо відповідну функцію на монотонність та екстремум.

$x$	$(-\infty; 0)$	0	..	1	$(1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$P'(x)$	+	0	+	0	-	0	+
$P(x)$	$\square$	0	$\square$	1	$\square$	27	$\square$

Отже,  $P_{\max}(1) = 1$ ,  $P_{\min}(3) = 27$ .

Побудуємо схематичний графік функції  $P(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$  (рис. 1.2).



**Рис. 1.2.** Графік функції  $P(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$



Перетинатимемо отриманий графік функції  $P(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$  горизонтальними прямими  $P(x) = a$ .

Помічаємо наступне:

якщо  $a \in (-27; 1)$ , то многочлен має три корені;

якщо  $a \in (-\infty; -27) \cup (1; +\infty)$  – один корінь;

якщо  $a = -27$  і  $a = 1$ , то многочлен має два корені.

*Відповідь:* при  $a \in (-27; 1)$  – 3 корені, при  $a = -27$  і  $a = 1$  – 2 корені, при  $a \in (-\infty; -27) \cup (1; +\infty)$  – 1 корінь.

Зауважимо, що підібрані завдання не вичерпують всіх можливостей многочленів щодо їх використання у олімпіадних задачах з математики.

## РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

### 2.1. Особливості навчання учнів елементів теорії многочленів у школі

Розглянемо особливості вивчення теми «Многочлени» у старшій профільній школі. Основною формою організації навчальної діяльності учнів старшої профільної школи є лекційно-практична форма. Навчальний теоретичний матеріал у старшій школі, що пропонується на лекціях, зокрема у класах з поглибленим вивченням математики, характеризується високим рівнем науковості. Старшокласникам, які працюють за лекційно-практичною формою навчання, прищеплюються навички самостійності (вони вчаться знаходити новий матеріал, працювати з довідниками), школярі стають більш активними та зацікавленими у вивченні нового матеріалу [43]. Саме тому, теоретичний матеріал з даної теми доцільно подавати у ході лекції, причому у старшій школі варто поєднувати лекції з практичними заняттями. Наприклад, при вивченні теми «Теорема Безу» вчитель спочатку знайомить учнів з теоремою та її доведенням (доведення для класів з поглибленим вивченням математики), а потім, на цьому ж уроці, розв'язуються практичні задачі на застосування теореми Безу та її наслідків.

«Многочлени» – це не нова тема для учнів старшої школи, тому їм доцільно пояснити, що формули скороченого множення, які вивчалися у 7 класі, є найпростішими випадками бінома Ньютона (1.3) та відомих тотожностей (1.1, 1.2). Саме це і є узагальненням і систематизацією матеріалу, вивченого раніше, до чого слід прагнути у старшій школі [8; 26; 48].

Ще одним прикладом вдалої систематизації навчального матеріалу є повторення способів розкладання на множники (винесення спільного множника за дужки, використання формул скороченого множення, групування) та долучення методу невизначених коефіцієнтів, виділення повного квадрату та кубу, теореми Вієта тощо [27].

При формуванні основного поняття «многочлен» необхідно враховувати те, що старшокласники вже знають з курсу алгебри середньої загальної школи. Кожен теоретичний факт, навіть доведений учнями самостійно, слід за можливості негайно закріплювати у ході виконання конкретних завдань.

Важливо показувати учням практичну значущість матеріалу щодо інших тем курсу алгебри і початків аналізу, наприклад розв’язування алгебраїчних рівнянь вищих порядків.

Часто для запам’ятовування деякого теоретичного матеріалу досить його подати у вигляді схеми, таблиці, тобто використати знаково-символічні засоби [53]. Наприклад, вивчаючи принципи роботи зі схемою Горнера, рекомендуємо замість теоретичного пояснення запропонувати старшокласникам розглянути формалізовану схему (рис. 2.1) та застосовувати її надалі для розв’язування відповідних завдань.

### *Схема Горнера*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = (x - \alpha)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1}) + P(\alpha)$$

	$a_0$	$a_1$	$a_2$		$a_k$		$a_{n-1}$	$a_n$
$\alpha$	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + \alpha \cdot b_0$	$b_2 = a_2 + \alpha \cdot b_1$		$b_k = a_k + \alpha \cdot b_{k-1}$		$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha \cdot b_{n-2}$	<b>остаток</b> $= a_n + \alpha \cdot b_{n-1}$

*Рис. 2.1. Формалізована схема Горнера*

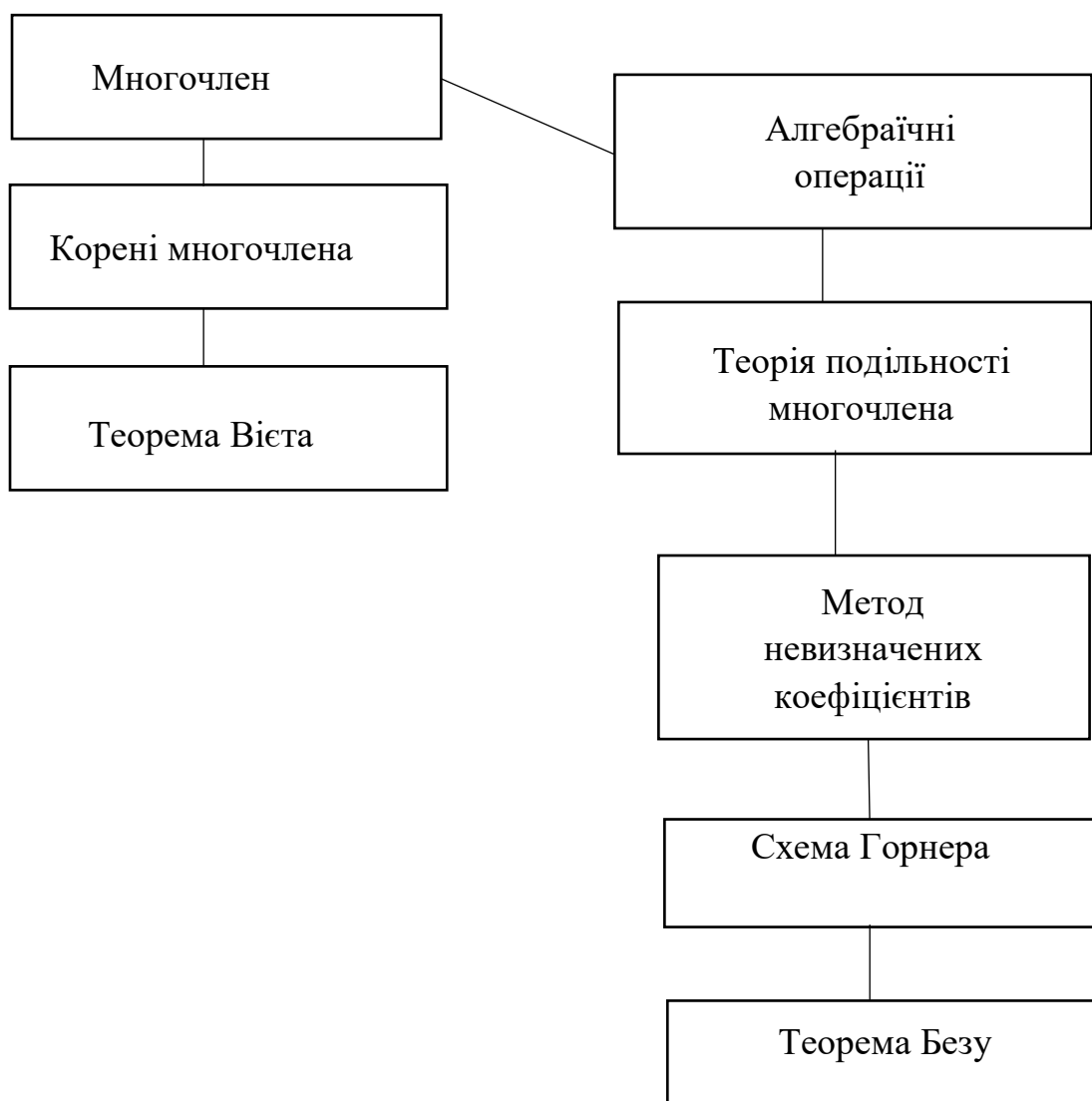
Для того щоб навчання з даної теми було ефективним та якісним необхідно враховувати вікові та психологічні особливості учнів старшої школи [47; 49]. Старший шкільний вік (юнацький вік) багато в чому відрізняється від підліткового. На відміну від підлітка, який дивиться на майбутнє з позиції теперішнього, юнак дивиться на теперішнє з позиції майбутнього. Це є дуже важливим аспектом у процесі самостійного професійного самовизначення. Саме тому, доцільно пропонувати учням старшої школи деякі задачі, що розглядаються в університетських курсах вищої математики, алгебри і теорії чисел, елементарної математики тощо.

Потреба у знаннях для юнаків стає найбільш усвідомленою і має практичну спрямованість; у процесі навчання виникає вибіркове відношення до навчальних дисциплін; у більшості випадків розвивається здатність більш продуктивно і самостійно працювати; в деяких випадках загострюється критичність мислення. Враховуючи те, що старшокласники стають вже більш самостійними, їм можна пропонувати на самостійне опрацювання деякі питання з теми «Многочлени» (наприклад, розкладання многочлена на множники, ділення кутом), учні також можуть самостійно розв'язати запропоновані вчителем задачі або розібратися з розв'язуванням фактично нових для них завдань за поданим зразком.

Психологи та методисти [47] зазначають, що у цей віковий період підвищується працездатність, витривалість організму, що супроводжується прагненням до активних дій; збільшується швидкість пам'яті, реакції; порівняно з підлітками, менше виражена надлишкова самовпевненість та критичність по відношенню до оточуючих тощо. У старшокласників активно розвивається рефлексія, пізнавальний інтерес то нового, на уроках математики учень проявляє зацікавленість до методологічних проблем математики та історії математики. Саме тому, для кращого засвоєння теми учнів варто переконати у важливості даної теми. Це можна зробити декількома способами: розгляд історичних відомостей про виникнення многочленів [5]; різноманітні застосування многочленів, з якими стикаються уже у курсах вищої математики, зокрема при розв'язуванні рівнянь. Цікавим прикладом для учнів, що вивчають математику на поглибленому рівні, буде те, що довільну неперервну функцію можна наблизити (подати) многочленом – це допоможе з'ясувати характер поведінки функції, зокрема дослідити на монотонність та екстремум [52].

Зауважимо, що старшокласники вміють уже узагальнювати та систематизувати вивчений матеріал. Тому, перед вивченням даної теми, пропонуємо надати учням схему (рис. 2.2) з основними поняттями, які будуть

розглядатись, у ході вивчення матеріалу схема може доповнитися відповідними теоретичними відомостями та формулами.



**Рис. 2.2. Узагальнююча схема вивчення теми «Многочлени»**

Старшокласники вже володіють розвиненим самостійним логічним мисленням, тобто бачать взаємозв'язки між елементами та можуть аналізувати інформацію, у зв'язку з цим вчителю математики немає необхідності завчасно повідомляти готовий алгоритм розв'язування того чи іншого завдання на многочлени, а пропонувати учням побудувати його самостійно. Інтерес до творчого наукового пошуку може бути спрямований на самостійне знаходження учнями цікавих історичних фактів про многочлени та їх

застосування, на розв'язування нестандартних та задач прикладного характеру, а також виконання науково-дослідницьких проектів тощо.

У процесі вивчення многочленів та їх застосувань доцільно використовувати інформаційно-комунікаційні технології, які допомагають підвищити позитивну мотивацію до навчання, розвивають самостійність учнів у процесі розв'язування завдань та перевірки результатів.

У статті [45] рекомендується користуватися комп'ютерним математичним середовищем Maple, для виконання різних операцій з многочленами та обчислення коренів алгебраїчних рівнянь вищого порядку.

Автори статті [56] переконують, що краще користуватися електронними таблицями Excel, принцип роботи з якими вивчається учнями на уроках інформатики. У ході дистанційного навчання рекомендуємо застосовувати хмарний додаток інтерактивних вправ Learning Apps, призначений як для повторення теорії та розв'язування нескладних завдань.

Проте, слід пам'ятати, що застосування комп'ютерних технологій не повинно бути освітньою метою, а лише засобом, що допомагає у досягненні результату. При вивченні многочленів у старшій школі доцільно використовувати метод проблемного навчання [58]. Розглянемо особливості поетапної реалізації проблемного навчання при вивченні теми «Теорема Безу та їх застосування» (див. табл. 2.1).

Таблиця 2.1.

### Створення проблемної ситуації у процесі вивчення теореми Безу

Етапи проблемного навчання	Реалізація
<i>I етап.</i> Виникнення проблемної ситуації	Необхідно знайти алгоритм розв'язання рівнянь вищого степеня: $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$
<i>II етап.</i> Формулювання проблемної задачі	

<p>III етап. Пошук способів розв'язання проблемної ситуації</p>	<p>Потрібно ліву частини рівності розкласти на множники. Щоб розкласти многочлен <math>P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6</math> на множники, слід підібрати його корені</p>
<p>IV етап. Доведення гіпотези</p>	<p>Вільний член <math>(-6)</math> допоможе у підборі коренів. Дільниками вільного члена є числа: <math>\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}</math>. Способом підбору знаходимо один єдиний корінь <math>x = 3</math>. Поділивши многочлен <math>P(x)</math> на двочлен <math>(x - 3)</math> кутом отримаємо:</p> $  \begin{array}{r}  x^3 - 5x^2 + 8x - 6 \quad   \quad x - 3 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\  -x^3 + 3x^2 \phantom{+ 8x - 6} \quad \underline{\hspace{1cm}} \phantom{+ 2} \\  -2x^2 + 8x \phantom{- 6} \quad \phantom{+ 2} \\  -2x^2 + 6x \phantom{- 6} \quad \underline{\hspace{1cm}} \\  2x - 6 \phantom{+ 2} \\  -2x + 6 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\  0  \end{array}  $ <p><math>P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = (x - 3)(x^2 - 2x + 2)</math></p> <p>Квадратний тричлен <math>(x^2 - 2x + 2)</math> не має дійсних коренів, так як <math>D &lt; 0</math>. Тому, єдиним коренем рівняння є <math>x = 3</math>. Помічаємо, що остача від ділення многочлена <math>P(x)</math> на двочлен <math>(x - 3)</math> дорівнює нулю та значенню многочлена у точці <math>x = 3</math></p>
<p>V етап. Перевірка правильності розв'язання проблемної ситуації</p>	<p>Отже, якщо <math>x = 2</math> не є коренем многочлена <math>P(x)</math>, то остача від ділення і значення многочлена у точці <math>x = 2</math> не дорівнює нулю. Дійсно,</p> $P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 6 = 8 - 20 + 16 - 6 = -2 \neq 0$

У процесі вивчення теми «Многочлен» важливо на кожному етапі проводити деяке тестування, щоб розуміти, яка саме тема викликає найбільші труднощі, визначити причину нерозуміння матеріалу – незнання правил чи нерозуміння дій. Зауважимо, що сучасне навчання робить величезну ставку на оволодіння математичними законами в ході виконання завдань, але на практиці ми стикаємося з тим, що не всі учні належним чином вивчають чи розуміють теорію. Для цього ми пропонуємо проводити математичні диктанти, під час проведення яких учні записують ті чи інші математичні правила до запропонованих учителем понять. На перших заняттях можна запропонувати учням математичний диктант такого змісту:

- 1) Записати означення многочлена.
- 2) Який многочлен називається многочленом стандартного вигляду?
- 3) Як звести многочлен до стандартного вигляду?
- 4) Як розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+» («-»)?
- 5) Які операції виконуються над многочленами?
- 6) Сформулюйте правило множення одночлена на многочлен.
- 7) Записати правило множення тричлена на двочлен.

Основною метою математичного диктанту є перевірка розуміння учнями теоретичного матеріалу. Проте, математика – практична наука, тому потрібно перевіряти ще й рівень оволодіння навичками у ході розв’язування завдань.

## **2.2. Аналіз типових помилок, що допускають учні при розв’язуванні задач на многочлени**

При розв’язуванні задач на многочлени учні досить часто припускаються помилок. Психологи встановили, що допущена учнем помилка є достатньо стійкою і її занадто важко викорінити у процесі навчання математики. Саме тому, дуже важливо своєчасно аналізувати самотійні та



контрольні роботи, встановлювати причини виникнення помилок, організовувати і проводити роботу по їх попередженню та подоланню.

З.І. Слєпкань [47] вважає, що типові помилки допускаються частиною учнів навіть у випадку вдалого пояснення вчителя, який акцентує увагу на цих помилках. Це пов'язано, перш за все, з тим, що людська свідомість, як правило, об'єктивно не в змозі охопити всі сторони явища. Але і допущену учнем помилку вчитель повинен використати для поглибленого розуміння школярами математичних фактів та закономірностей.

Автори статті Л.А. Благодир, В.О. Швець [10] переконують, що доцільно розглядати проблему попередження і виправлення помилок учнів під час вивчення математики з погляду поділу навчального матеріалу на змістові лінії. У відповідності до цього, вважаємо за потрібне повторити з учнями основні особливості виконання тотожних перетворень з многочленами.

Всі помилки, що виникають у процесі розв'язування задач на многочлени фактично можна класифікувати наступним чином:

- фактичні (не вміння застосовувати теоретичний матеріал при розв'язуванні задач, неправильне розуміння формул та означень тощо);
- логічні (неправильне розуміння та використання зв'язків у процесі міркувань, пропуск логічних кроків; виникають найчастіше при розв'язуванні задач на знаходження коренів многочлена);
- мовні (помилки при вживанні математичних термінів та символіки, русизми, лексичні помилки тощо);
- графічні (неправильна побудова графіків) [47].

Найчастіше виникають **фактичні помилки**. Більшість з них пов'язані з прогалинами у знаннях учнів, що залишилися ще з основної школи. Розглянемо найпоширеніші з них.

*Помилки, пов'язані із розкладом многочленів на множники.* Такого виду помилки часто пов'язані із винесенням за дужки спільного множника:

– при винесенні одночлена за дужки на його місце, як правило, не ставлять одиницю:  $2a^3bc + 3a^2b^3 + ab = ab(2a^2c + 3ab^2)$ , у цьому випадку пропонуємо виконати наступні записи, щоб учням було зрозуміло, чому необхідно залишити ще один доданок – одиницю:  $2a^3bc + 3a^2b^3 + ab = 2a^3bc + 3a^2b^3 + 1ab = ab(2a^2c + 3ab^2 + 1)$ ;

– при винесенні одночлена зі знаком мінус за дужки знаки в дужках не змінюють на протилежні:  $2a^3bc - 3a^2b^3 - ab^2 = -ab(\boxed{?}2a^2c \boxed{-} 3ab^2 \boxed{-} b)$ ;

– при винесенні двочлена за дужки, що є різницею двох одночленів не звертають уваги на знак:

$$x^4 - x^3y - y^3 + y^2x = x^3(\underline{x-y}) - y^2(\underline{y-x}) = (x-y)(x^3 \boxed{-} y^2);$$

– при винесенні двочлена за дужки учні в результаті його записують два рази:  $x^4 - x^3y - y^3 + y^2x = x^3(x-y) + y^2(x-y) = (x-y)\boxed{(x-y)}(x^3 + y^2)$ .

З метою виявлення таких помилок учням слід пропонувати зробити обернене перетворення помножити одночлен на відповідний многочлен, чи перемножити многочлени [9].

Деякі учні допускають помилки при застосування формул скороченого множення через поверхневе засвоєння матеріалу ще, починаючи з 7 класу. Серед такого типу помилок виділимо наступні:

– при піднесенні двочлена до квадрату:  $2a^3bc + 3a^2b^3 + ab$   
 $(m^2 + n)^2 = m^4 + n^2$ , у цьому випадку доцільно нагадати учням формулу квадрат суми  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , а також дати завдання замість піднесення до квадрату перемножити двочлени:

$$(m^2 + n)(m^2 + n) = m^4 + m^2n + nm^2 + n^2 = m^4 + 2m^2n + n^2;$$

– при застосуванні формули різниці квадратів:

$$a) (c^2 + d)(c^2 - d) = c^4 \boxed{+} d^2;$$

$$\text{б) } 4c^2 - 9d^2 = (2c - 3d)(2c - 3d);$$

$$\text{в) } 4c^2 + 9d^2 = \boxed{(2c + 3d)(2c - 3d)}.$$

– при застосуванні формули формул сума (різниця) кубів:  
 $c^3 \pm 8 = c^3 \pm 2^3 = (c \pm 2)(c^2 \mp 4c + 4)$  (замість неповного квадрату записують повний квадрат). Для всіх випадків правильність результату пропонуємо перевіряти шляхом множення відповідних многочленів.

У ході виконання проміжних досліджень помилки виникають у зв'язку з тим, що учні *погано розуміють властивості степенів*. На уроках математики учням, з метою повторення дій над степенями, можна пропонувати виконувати експрес-завдання, проводити математичні диктанти, заповнювати таблиці із пропусками тощо [44].

Іноді учні, виконуючи ділення многочлена на многочлен, *втрачають остачу від ділення*. Поділивши многочлен на многочлен, одним із відомих способів, учні в результаті можуть не дописати остачу. Це є суттєвою помилкою при розв'язуванні рівнянь вищого порядку.

**Помилки логічного характеру** у більшості випадків пов'язані із недовідомістю засвоєнням матеріалу щодо використання правил-алгоритмів наприклад щодо застосування теорії многочленів до знаходження коренів многочлена з цілими коефіцієнтами (див. табл. 2.2). Порушення поетапності виконання, як правило, приводить до нераціонального розв'язання та виникнення помилок. Саме тому, доцільно окремо звертати увагу учнів на такі завдання, розв'язання яких потребує алгоритмічного підходу.

Відомо, що у старшокласників уже починає розвиватися теоретичне мислення, у відповідності до цього у старшій школі починають з'являтися лекційні заняття. Як правило, теоретичний матеріал є більш розширеним, ніж у основній школі. Відтворюючи основні означення, теореми та інші твердження учні інколи допускають **мовні помилки**. Прикладами таких помилок є: плутання понять «квадрат різниці», «різниця квадратів», «куб

суми», «сума кубів» тощо; неправильне формулювання тверджень (пропуск суттєвих понять, умов тощо); підміна наслідку теоремою (поширена помилка при застосуванні теореми Безу та її наслідків). Для попередження такого типу помилок слід майже на кожному занятті повторювати основні теоретичні твердження шляхом проведення математичних диктантів, фронтального опитування та іншими способами.

Значно рідше виникають *помилки графічного характеру*, оскільки у ході розв'язування задач з многочленами учні застосовують графічну інтерпретацію, лише у тих випадках, коли того вимагає умова завдання. Проте є деякі завдання на використання многочленів, при розв'язуванні яких доцільно використовувати графіки функції. Наприклад, при розв'язуванні рівнянь чи нерівностей відразу не вдається знайти корінь (розкласти на множники) тоді можна побудувати функцію, яка задається многочленом, щоб перевірити наявність (чи відсутність) коренів. Для попередження графічних помилок доречно повторити властивості степеневі функції та особливості побудови її графіків.

Отже, у процесі аналізу типових помилок, які допускають старшокласники при розв'язуванні задач з многочленами, можна зробити висновок про те, що виникнення помилок краще завчасно попередити, ніж, потім, важко працювати над їх подоланнях.

### **2.3. Методичні рекомендації щодо розв'язування практичних завдань з алгебри многочленів**

Відомо, що різноманітних завдань на многочлени є велика кількість, починаючи від усних вправ і закінчуючи прикладними задачами на їх застосування.

Усні вправи не лише пробуджують інтерес до вивчення математики, але й дозволяють учням більш активно засвоїти новий матеріал. Наприклад, при вивченні теми «Стандартний вигляд многочлена» учням можна

запропонувати відшукати серед наявних многочленів, многочлени записані у стандартному вигляді  $\langle 6x^4 - 2x^3 + x + a, (x^2 - 3)(x^2 + 3) + 18, 7y^3x^2 + bxy - 1, \log_3 2 \cdot x^3 + 5x^2 - 3x + \cos \frac{\pi}{3}, (x+5)(y-3+1) - 10, 6x^2 - 2x^3 + x^2 + ax^5 + 5x, (1+\sqrt{2})x^4 + ax^2 - x \cos \frac{\pi}{12} + 1, 5x^5x^4x^3x^2x \rangle$  [17]; при вивченні матеріалу з розкладання багаточленів на множники, зокрема, у процесі розгляду узагальненої теореми Вієта, пропонуємо наступні вправи, для вирішення яких конкретні дії потрібно робити «в умі» (усно).

«Без розкладу многочленів  $P_3(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$  на множники, знайти значення виразів:

- 1)  $x_1 + x_2 + x_3$ ;
- 2)  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ ;
- 3)  $x_1x_2x_3$ ;
- 4)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ ;
- 5)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ;

де  $x_1, x_2, x_3$  – корені многочлена  $P_3(x)$ ».

Крім використання стандартних прийомів розкладання на множники іноді доцільно розглянути нестандартні способи, тим самим провокуючи учнів до креативності у ході розв'язування завдань: «Розкласти многочлен на множники  $P(x, y, z) = x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$ ». Стандартними способами групування та винесення спільного множника за дужки не вдається розв'язати завдання, тому необхідно вдаватися до нестандартних прийомів. Припустимо, що  $x = y$ , отримаємо:  $P(x, y, z) = x(x^2 - z^2) + x(z^2 - x^2) + z \cdot 0 = 0$  – це означає, що многочлен  $P(x, y, z)$  ділиться націло на двочлен  $(x - y)$ .

Аналогічно, многочлен  $P(x, y, z) = 0$  при  $y = z$ ,  $x = z$ , тобто  $P(x, y, z)$  також ділиться націло на двочлени  $(y - z)$  та  $(z - x)$ .

Отже,  $P(x, y, z)$  можна подати у вигляді:

$$P(x, y, z) = a(x - y)(y - z)(z - x), \text{ де } a - \text{деяке число.}$$

Для знаходження невідомого числа  $a$  припустимо, що  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 3$ , тоді

$$P(1, 2, 3) = (2^2 - 3^2) + 2(3^2 - 1^2) + 3(1^2 - 2^2) = -5 + 16 - 9 = 2 \quad \text{і}$$

$$P(x, y, z) = a(1 - 2)(2 - 3)(3 - 1) = 2a, \text{ а отже } 2a = 2 \Rightarrow a = 1.$$

$$\text{Остаточно, } P(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x).$$

Даний нестандартний спосіб розкладання на множники можна застосувати до розв'язування завдань: «Розкласти многочлени на множники:  $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$ ;  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ » [13].

Зауважимо наступне, якщо завдання можна розв'язати декількома способами, то варто учням дати можливість застосувати різні способи, а можливо хтось з них запропонує свій, більш раціональний, все це розвиває їх дослідницькі здібності та творче мислення.

У процесі розв'язування перших завдань з теми пропонуємо хід розв'язання записувати у вигляді розширеної таблиці з відповідним алгоритмом (див. табл. 2.2). Розглянемо алгоритм знаходження коренів многочлена на конкретному прикладі: «Знайти корені многочлена  $P_4(x) = 6x^4 + 7x^3 - 22x^2 - 28x - 8$ ».

Таблиця 2.2.

### Алгоритм знаходження коренів многочлена

Алгоритм		Реалізація
1.	Записати множину дільників старшого коефіцієнта $a_n$ (можливі значення $p$ )	$\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

2.	Записати множину дільників вільного члена $a_0$ заданого многочлена (можливі значення $q$ )	$\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$																		
3.	Записати декілька претендентів на роль коренів многочлена у вигляді дробу $\frac{p}{q}$	$\left\{\pm \frac{1}{2}; \pm 1; \pm 2; \pm \frac{4}{3}\right\}$																		
4.	Використовуючи спосіб підстановки та користуючись наслідками з теореми Безу, відбираємо корені заданого многочлена	Корені: $-\frac{1}{2}, 2; -2$																		
5.	Понижаємо степінь многочлена, використовуючи схему Горнера або ділення кутом	<div>Застосуємо схему Горнера</div> <table><tr><td></td><td>6</td><td>7</td><td>-22</td><td>-28</td><td>-8</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td>19</td><td>16</td><td>4</td><td>0</td></tr><tr><td>-2</td><td>6</td><td>7</td><td>2</td><td>0</td><td></td></tr></table>		6	7	-22	-28	-8	2	6	19	16	4	0	-2	6	7	2	0	
	6	7	-22	-28	-8															
2	6	19	16	4	0															
-2	6	7	2	0																
6.	Перевіряємо, якщо степінь частки не більше 2, то процес знаходження коренів зводиться до розв'язування квадратних або лінійних рівнянь, а якщо «ні», то повертаємося до попереднього пункту 5	<div>Знаходимо корені рівняння</div> $6x^2 + 7x + 2 = 0.$ $D = 49 - 48 = 1 > 0$ $x_1 = \frac{-7+1}{12} = -\frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{-7-1}{12} = -\frac{2}{3}$ <div>Записуємо відповідь: <math>x_1 = -\frac{1}{2};</math></div> $x_2 = -\frac{2}{3}; x_{3,4} = \pm 2.$																		

Зауважимо, що алгоритми розв'язування деяких завдань на многочлени наведені у таблицях з алгебри Є.П. Неліна [38], де автор пропонує паралельно розглядати етапи алгоритму та демонстрацію цих етапів на прикладі. Старшокласники можуть самостійно розібратися з даним матеріалом, завдяки такому раціональному поданню матеріалу.

Більшість учнів мають значні труднощі із розв'язуванням завдань з параметрами, оскільки завдання такого типу не мають стандартних алгоритмів розв'язування, проте їх важливо застосовувати у навчальному процесі для більш глибокого розуміння учнями основних положень теорії. У ході вивчення теореми Безу пропонуємо учням розв'язати завдання з параметром: «При яких значеннях  $m$  многочлен  $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$  ділиться націло на многочлен  $(x + y + z)$ » [25]. Згідно з теоремою Безу остача від ділення заданого многочлена  $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$  на  $(x + y + z)$  дорівнює значенню цього многочлена при  $x = -y - z$ , тобто остача  $R = (-y - z)^3 + y^3 + z^3 + m(-y - z)yz = -(m + 3)(y^2z + yz^2)$ . За умовою задачі многочлен  $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$  ділиться націло на  $(x + y + z)$ , отже остача  $R = 0$ , тобто  $m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3$ .

Цікавими та корисними для учнів з точки зору використання відомостей з теми «Многочлени» є завдання прикладного та практичного змісту. Рекомендуємо такі задачі розв'язувати на останніх заняттях з даної теми, коли основний теоретичний матеріал уже розглянуто. Прикладом такого завдання є наступне: «Ребра прямокутного паралелепіпеда є коренями многочлена  $P_3(x) = x^3 - 20x^2 + 125x - 244$ . Знайти об'єм, площу поверхні та діагональ паралелепіпеда» [30].

У процесі розв'язування будемо використовувати узагальнену теорему Вієта для многочлена третього степеня та отримаємо наступні співвідношення  $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ ,  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 125$ ,  $x_1x_2x_3 = 244$ .



Відомо, що об'єм прямокутного паралелепіпеда визначається за формулою  $V = x_1 x_2 x_3$ , де  $x_1, x_2, x_3$  – відповідні три виміри (довжина, ширина та висота), тобто  $V = 244$  (кб. од.).

Для знаходження площі повної поверхні використовуємо формулу  $S = 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)$ , де  $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = 125$ , тобто  $S = 2 \cdot 125 = 250$  (кв. од.).

Діагональ прямокутного паралелепіпеда знайдемо із формули  $d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ .

Виконавши деякі перетворення та врахувавши попередні співвідношення, отримаємо:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3), \quad \text{де } x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = 125.$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3),$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 20^2 - 2 \cdot 125 = 400 - 250 = 150.$$

$$\text{Тоді, } d = \sqrt{150} = 5\sqrt{6} \text{ (од.).}$$

$$\text{Відповідь: } V = 244 \text{ (куб. од.)}, S = 250 \text{ (кв. од.)}, d = 5\sqrt{6} \text{ (од.).}$$

Таким чином, розв'язуючи завдання на многочлени слід повторити основні положення теорії; починати варто з нескладних усних вправ; для деяких завдань потрібно записувати алгоритми розв'язування; крім стандартних способів іноді знайомити учнів з нестандартними прийомами; з метою формування дослідницьких здібностей та творчого мислення розв'язувати нестандартні завдання, зокрема ті, що містять параметр; для зацікавлення старшокласників та демонстрації важливості теми «Многочлени» рекомендуємо розв'язувати задачі практичного та прикладного змісту.

### РОЗДІЛ 3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА ОСНОВНИХ ПОЛОЖЕНЬ ДОСЛІДЖЕННЯ

#### 3.1. Методика проведення педагогічного експерименту

Ключові положення методичного дослідження на тему «Методика вивчення многочленів у шкільному курсі алгебри» були перевірені експериментальним шляхом у процесі педагогічного експерименту, який складається із трьох етапів: констатувальний, пошуковий та формувальний. У посібниках [33; 46] міститься науково-теоретична база щодо особливостей організації та проведення експериментальних педагогічних досліджень.

Педагогічний експеримент проводився при вивченні теми «Многочлени» у 10 класі, що навчаються за профільним рівнем.

На першому етапі експерименту – *констатувальному* було вивчено стан проблеми дослідження, визначено основні завдання, які необхідно виконати, та шляхи їх реалізації. На цьому етапі, перш за все, здійснено аналіз наукової, навчальної, психолого-педагогічної та методичної літератури за темою дослідження. Дещо пізніше було проведено анкетування вчителів математики загальноосвітніх закладів середньої освіти м. Києва; здійснено педагогічне спостереження за процесом вивчення многочленів старшокласників з метою вивчення стану проблеми у шкільній практиці, а також розглянуто та проаналізовано знання, навички та уміння учнів щодо виконання завдань з многочленами у процесі написання перевіркової роботи на повторення теми «Многочлени та дії над ними», що вивчалася у курсі математики основної школи.

Зауважимо, що метою анкетування вчителів математики було з'ясування того, наскільки досліджувана нами проблема є актуальною, як вони реалізують вивчення питань, пов'язаних з многочленами (додаток А). Всього було опитано 7 вчителів математики, що працюють у старшій профільній школі.

Основною метою проведення контрольної роботи є перевірити залишкові знання, навички та уміння, які мають старшокласники на початок вивчення теми «Многочлени». Роботу виконували 54 учні з 10 класів.

На другому етапі педагогічного експерименту – пошуковому, на основі отриманих результатів на попередньому етапі констатувального експерименту, було проведено пошук шляхів вирішення виявлених проблем. У ході даного етапу було виокремлено вікові та психологічні особливості старшокласників (пункт 2.1) і, відповідно до цього, описані методичні особливості навчання учнів теорії многочленів у старшій школі (пункт 2.1). Зокрема, досліджено деякі аспекти застосування проблемного навчання, інтерактивних та інформаційно-комунікаційні технології навчання (див. пункт 2.1). Однією із найважливіших особливостей вивчення даної теорії многочленів є аналіз помилок, що допускають учні у процесі написання самостійних та контрольних робіт, а також проведення роботи щодо їх попередження та усунення (пункт 2.2).

На даному етапі експерименту було поставлено завдання розробити методичні рекомендації щодо формування навичок та умінь учнів при розв'язуванні практичних завдань з алгебри многочленів (пункт 2.3), а також розробити конспекти уроків з теми «Многочлени» для 10 класу (профільний рівень), що є важливими та необхідними дидактичними матеріалами для наступного етапу педагогічного дослідження – формувального експерименту.

У ході формувального експерименту відбулася перевірка ефективності запропонованої нами методики щодо навчання старшокласників (10 клас) теорії многочленів. Сутність відповідної перевірки полягає у тому, що дослідницьким шляхом було визначено та зіставлено рівень навчальних досягнень учнів шляхом проведення поточної перевірки успішності учнів та якості виконання ними домашніх завдань, проведення самостійних та контрольних робіт однакового змісту в контрольних (далі КГ – контрольна група) та експериментальних класах (далі ЕГ – експериментальна група). Результати, які були отримані у експериментальних та контрольних групах,

підлягали порівняльному аналізу шляхом співставлення відповідних числових даних чи за допомогою побудови діаграм. Ефективність використання нової методики встановлювали також за допомогою цілеспрямованих педагогічних спостережень та бесід з вчителями та учнями.

В формувальному експерименті взяли участь 54 старшокласники. Перевірка результативності методики здійснювалася за таким показником як рівень навчальних досягнень учнів при вивченні теми «Многочлени»

### **3.2. Аналіз результатів педагогічного експерименту**

Виконаємо аналіз результатів педагогічного експерименту, починаючи з його першого етапу – констатувального експерименту. Нагадаємо, що у ході першого етапу експерименту нами вивчався стан проблеми дослідження шляхом опитування вчителів старшої школи, педагогічного спостереження за навчальною діяльністю старшокласників та написання учнями перевірконої письмової роботи на повторення основних фактів з теми «Многочлени».

Проведене опитування вчителів математики, які працюють зі старшокласниками, показало, що тема «Многочлени» є необхідною для вивчення у старшій школі (близько 80%), інші вчителі зазначили, що введення даної теми тільки перевантажує навчальну програму з математики. Більшість учнів засвоюють цю тему на середньому і достатньому рівнях, досягнення на високому рівні, як правило, демонструють менше 10% учнів, а на достатньому і високому рівнях засвоюють дану тему у середньому 30% старшокласників. Найбільш складними питаннями для учнів є застосування многочленів до розв'язування рівнянь, а також узагальнена теорема Вієта. Більшість помилок, що допускають старшокласники є фактичними помилками, які в основному пов'язані з прогалинами в знаннях учнів ще з основної школи (більш детально помилки описані у пункті 2.2). Для зацікавлення учнів при вивченні теми «Многочлени» вчителі використовують історичний матеріал, інформаційні та інтерактивні технології.

Переважній більшості вчителів математики (близько 85%) вистачає завдань з підручника, іноді добирають завдання для самостійних та контрольних робіт, а інша частина вчителів (15%) готують додаткові завдання для проведення факультативів та курсів за вибором додаткових занять, а також для підготовки учнів до участі в олімпіаді з математики. Додаткові задачі на уроці пропонуються дуже рідко, аргументуючи це тим, що на вивчення теми виділяється досить мало часу, якого не вистачає для інших завдань.

Відповідно до сучасних умов та вимог всі без винятку вчителі математики використовують інформаційно-комунікаційні технології, пов'язано це з дистанційною та змішаною формами навчання. Близько чверті вчителів користуються комп'ютерними математичними програмами (GeoGebra, Maple, Desmos) з метою їх демонстрації результатів застосування цих програм перед учнями. Інтерактивні технології вчителі використовують не часто, в основному це робота у групах та елементи мозкового штурму. Більшість вчителів надають перевагу лише традиційній технології навчання. Близько третини вчителів іноді використовують хмарний додаток LearningApps для створення інтерактивних вправ.

Педагогічне спостереження за процесом вивчення старшокласниками теми «Многочлени» показало, що учні пам'ятають основні означення, теореми та наслідки. Проте, доводити математичні твердження з даної теми можуть далеко не всі. При розв'язуванні завдань з теми учні, як правило, проявляють зацікавленість, особливо якщо завдання є доступним. Завдання підвищеного рівня складності одразу розв'язати, як правило, старшокласникам не вдається. Тому такі завдання пропонуються у якості додаткових (необов'язкових) завдань для домашньої роботи.

Перевірочна робота на повторення була запропонована не стільки для перевірки рівня навчальних досягнень учнів, скільки для виявлення тих питань, які для учнів є складними та потребують додаткового опрацювання на заняттях з теми «Многочлени». Наявність в учнів залишкових знань з даної теми, що вивчалася в основній школі, допомагає вчителю математики

вибудувати таку систему вивчення цієї теми, яка б була ефективною для учнів конкретного класу. Проаналізуємо результати перевірконої роботи на повторення (див. додаток Б). Майже всі учні 10 класу справилися з першим завданням на спрощення виразу, проте були поодинокі помилки неправильного застосування формул квадрату суми та різниці, а саме втрата подвоєного добутку. Щодо розкладу многочленів на множники, то завдання а)  $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2$  правильно розв'язали близько 85% учнів, проте дуже часто не раціональним способом (не із використанням формули різниці кубів, а безпосереднім піднесенням до квадрату тричлена та двочлена відповідно з подальшим зведенням подібних доданків), витрачаючи при цьому більше часу на розв'язування цього завдання. Із наступним завданням справились лише 17% школярів, складність цього завдання пов'язана з невмінням виконувати правильне групування доданків, якщо вони не всі явно представлені у відповідному аналітичному записі даного виразу. Наступні два завдання були не складні, спрямовані на знайомство учнів з поняттям «корінь многочлена» та проведення пропедевтики вивчення теореми Безу, більшість учнів справилися з їх виконанням. Лише було виявлено декілька помилок допущених при зведенні подібних доданків та некоректні записи у ході розв'язування завдань.

Найбільш складним для учнів стало останнє завдання на застосування теореми Вієта. Менше ніж 10% старшокласників зуміли розв'язати його правильно. Зауважимо, що близько 70% учнів намагалися розв'язати це завдання шляхом знаходження коренів заданого квадратного рівняння  $x^2 - 9x + 6 = 0$  через дискримінант, проте більшість з цих учнів, отримавши ірраціональні корені, на даному етапі завершили виконання завдання. Проте, цей спосіб розв'язання є неправильним, оскільки в умові задачі чітко зазначено «не розв'язуючи рівняння, знайти значення виразів».

Отже, на основі вище зазначеного було зроблено висновок, що математична підготовка учнів з теми «Многочлени» потребує вдосконалення,

а вміння застосовувати знання при розв'язуванні завдань з многочленами не є достатніми.

На етапі пошукового експерименту було розроблено конспекти уроків з теми «Многочлени» для 10 класу (профільний рівень) (див. додаток В), зокрема підібрано історичний матеріал для зацікавлення учнів, створено інтерактивні вправи як теоретичного, так і практичного характеру не лише для перевірки знань учнів, але й з метою формування позитивної мотивації до навчання, підготовлено різнорівневі завдання для самостійних та контрольних робіт, у тому числі й тестові задачі. При розробці й підборі навчального матеріалу та відповідних практичних завдань на многочлени використовувалися посібники [5; 13; 18; 19; 25; 54].

Розробка уроків з теми «Многочлени» здійснювалася відповідно до календарно-тематичного планування (див. табл. 3.1).

*Таблиця 3.1.*

**Календарно-тематичне планування з теми «Многочлени»**

№ з/п	Тема	Кількість годин	Примітки
1.	Многочлени, дії над ними. Ділення многочленів	1	с/р
2.	Теорема Безу та наслідки з неї	1	
3.	Розв'язування алгебраїчних рівнянь	1	
4.	Розв'язування задач і вправ. Підготовка до контрольної роботи	1	
5.	Контрольна робота з теми «Многочлени»	1	

На цьому етапі було також запропоновано дотримуватися наступних *методичних рекомендацій* щодо розв'язування практичних задач з алгебри многочленів:

1) для активного засвоєння нового матеріалу та пробудження інтересу до вивчення математики слід пропонувати учням усні вправи;

2) доцільно розглядати нестандартні способи розв'язування завдань, тим самим провокуючи учнів до креативності;

3) розв'язування завдань декількома способами та задач з параметрами розвиває дослідницькі здібності та творче мислення учнів ;

4) для деяких завдань потрібно записувати алгоритми розв'язування;

5) з метою зацікавлення старшокласників та демонстрації важливості теми «Многочлени» рекомендуємо розв'язувати задачі практичного та прикладного змісту.

Ще до початку формувального експерименту нами було проведено контрольну роботу з теми «Многочлени та дії над ними» (див. додаток Б) для перевірки залишкових знань учнів у контрольній та експериментальній групах у різних класах відповідно. Аналіз результатів виконання даної контрольної роботи показав наступні результати (табл. 3.2, рис. 3.1), відповідно до яких рівень навчальних досягнень з даної теми ЕГ і КГ відрізняються не суттєво.

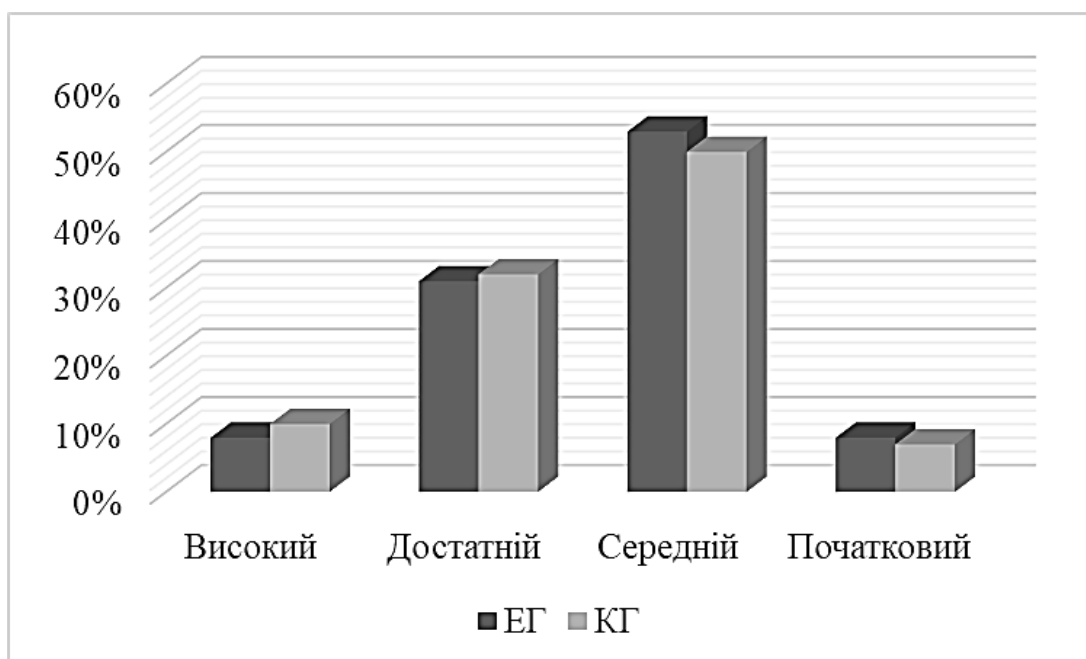
У подальшому старшокласники з ЕГ працювали за розробленими нами заняттями із врахуванням запропонованих методичних рекомендацій. Враховувалися також поточні оцінки, що одержували учнів при вивченні цієї теми.

*Таблиця 3.2.*

**Рівень навчальних досягнень старшокласників  
до початку формувального експерименту (у відсотках)**

Рівень навчальних досягнень	Групи	
	ЕГ	КГ
Високий	8%	10%
Достатній	31%	32%
Середній	53%	50%
Початковий	8%	7%





***Рис. 3.1. Рівень навчальних досягнень старшокласників до початку формувального експерименту (у відсотках)***

Вчителі математики, які працювали з учнями ЕГ неодноразова відмічали досить позитивні зрушення, а саме – старшокласники стали більш самостійними та уважними, зацікавленими та вмотивованими, вони активно співпрацюють з вчителем та з однокласниками, виконують інтерактивні вправи, розв’язувати різнорівневі завдання, а дехто з учнів навіть використовують прикладні математичні програми для перевірки правильності виконання завдань.

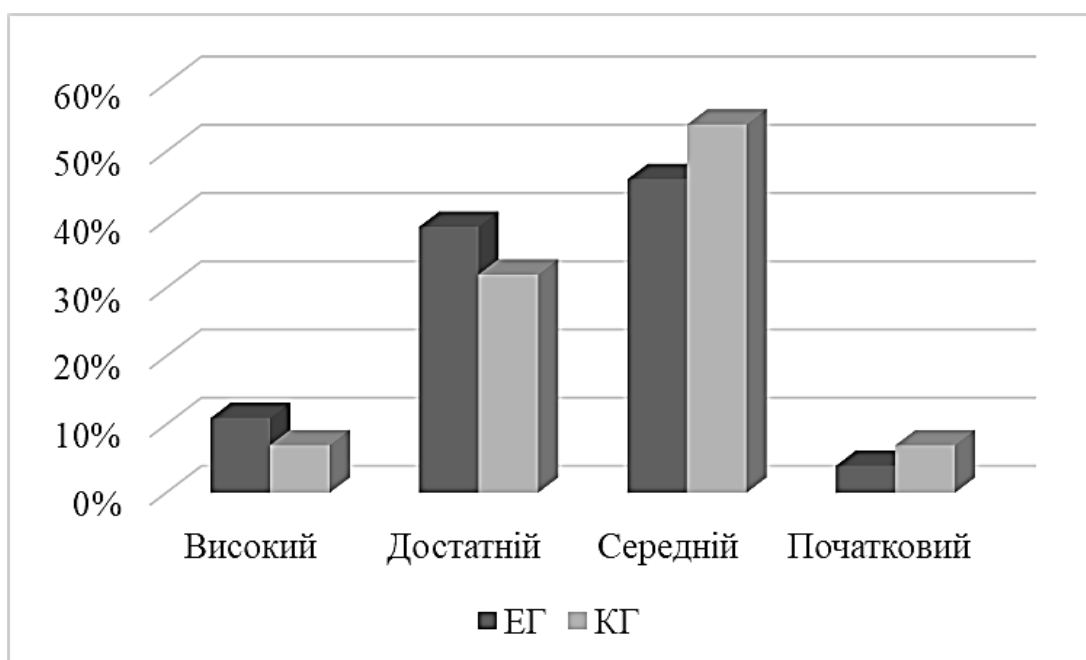
Контрольний зріз знань учнів різних груп щодо рівня навчальних досягнень учнів з теми «Многочлени» здійснювався наприкінці вивчення даної теми.

Аналіз результатів виконання старшокласниками контрольних робіт дав змогу порівняти рівні навчальних досягнень учнів 10 класів з теми «Многочлени» на початку та наприкінці педагогічного експерименту (див. табл. 3.3 рис. 3.2).

Таблиця 3.3.

**Рівень навчальних досягнень старшокласників (у відсотках)**

Етапи експерименту  Рівень навчальних досягнень	Початок експерименту		Завершення експерименту	
	ЕГ	КГ	ЕГ	КГ
Високий	8%	10%	11%	7%
Достатній	31%	32%	39%	32%
Середній	53%	50%	46%	54%
Початковий	8%	7%	4%	7%



**Рис. 3.2. Рівень навчальних досягнень старшокласників на завершальному етапі експерименту (у відсотках)**

Таким чином, статистичні дані, які показали певне поліпшення кількісних показників рівня навчальних досягнень старшокласників та позитивні відгуки учителів математики свідчать про ефективність пропонованої методики, можливість та необхідність її використання при викладанні теми «Многочлени» у 10 класі.

## ВИСНОВКИ

Теорія многочленів один із фундаментальних розділів сучасної математичної науки. З розвитком комп'ютерної техніки було знайдено ще більше різноманітних застосувань алгебри многочленів. Аналіз діючих програм та шкільних підручників за темою дослідження показав, що многочлени вивчаються та використовуються при розв'язуванні задач протягом усього шкільного курсу алгебри. Вивчення теорії многочленів у старшій школі має на меті встановити змістовий зв'язок між вивченням цієї теми у шкільному курсі математики та курсі вищої математики, забезпечивши тим самим наступність між середньою та вищою освітою.

Аналіз навчальної, методичної та психолого-педагогічної літератури показав, що вивчення многочленів є досить трудомістким процесом, що вимагає від вчителя та учнів постійної систематичної роботи. Застосування сучасних інтерактивних та інформаційно-комунікаційних технологій, використання цікавих фактів з історії математики, розв'язування прикладних задач, завдань олімпіадного характеру зробить цей процес значно ефективнішим. При цьому важливо своєчасно попереджувати та усувати помилки, які допускають учні при розв'язуванні задач на многочлени.

Значну увагу у ході дослідження приділено аналізу методичних особливостей навчання старшокласників теорії многочленів та розробці методичних рекомендації щодо розв'язування задач з алгебри многочленів.

Основні положення дослідження перевірялися у ході педагогічного експерименту, аналіз результатів якого беззаперечно підтверджує ефективність запропонованої методики.

Матеріал магістерської роботи буде корисним для вчителів математики при викладанні теми «Многочлени» у старшій школі та проведенні факультативів, математичних гуртків, а також для студентів – майбутніх вчителів математики у процесі проходження педагогічної практики, при написанні різних кваліфікаційних робіт за подібною тематикою.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглибл. рівні з 8 кл. проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти./ А.Г. Мерзляк та ін. Харків: Гімназія, 2019. 304 с.
2. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти./ А.Г. Мерзляк та ін. Харків: Гімназія, 2018. 400 с.
3. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Частина 2. /С.Т. Завало та інші. Київ: Вища школа, 1986. 264 с.
4. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Н.А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, О.М. Коломієць, З.О. Сердюк. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2015. 288 с.
5. Бевз В.Г. Історія математики. Харків: Вид. гр. «Основа», 2006. 176 с.
6. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навчальний посібник. Київ: Вища школа, 1989. 367 с.
7. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підручник для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. Київ: Видавництво «Відродження», 2015. 288 с.
8. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Основа», 2018. 336 с.
9. Благодир Л.А., Колмакова В.О. Попередження помилок учнів під час вивчення теми «Многочлени». *Наукові записки [Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка]. Серія: Педагогічні науки.* 2022. Вип. 200. С. 53-58.
10. Благодир Л.А., Швець В.О. Математичні помилки як об'єкт наукових досліджень. *Наукові записки Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія: Педагогічні та історичні науки* Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2011. Вип. 93. С. 19-28.

11. Варех Н.В., Д'яченко М.П., Козакова Н.Л. Лекції із курсу «Алгебра та геометрія»: навчальний посібник. Дніпро: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2013. 228 с.
12. Волошинова І.В. Елементи теорії многочленів у шкільному курсі математики. *Всеукраїнська науково-практична конференція студентів та молодих науковців «Фізика. Математика. Комп'ютерні науки. Статистика. Освітні вимірювання. Технології. Навчання», 24 березня 2017 року*. URL: [https://phm.cuspu.edu.ua/images/konf\\_ftn/2017](https://phm.cuspu.edu.ua/images/konf_ftn/2017) (дата звернення: 07.02.23).
13. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Алгебра. Розв'язування задач і вправ. Навчальне видання. Київ: Магістр-S, 1997. 256 с.
14. Державний стандарт базової середньої освіти, затверджений постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898.
15. Завало С.Т. Елементи аналізу. Алгебра многочленів. Київ: Рад. школа, 1972. 462 с.
16. Завало С.Т. Курс алгебри. Київ: Вища школа, 1985. 503 с.
17. Збірник задач з теорії многочленів / за редакцією І.О. Рокіцького, Вінниця, 2004 139 с.
18. ЗНО 2021. Математика. Комплексне видання для підготовки до ЗНО і ДПА 2021. / А. Капіносов та інші. Тернопіль: Підручники і Посібники, 2020. 480 с.
19. Ізюмченко Л.В., Нічишина В.В., Ріжняк Р.Я. Многочлени: методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10–11 класів / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2009. 50 с.
20. Істер О.С. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Київ: Генеза, 2015. 256 с.
21. Істер О.С., Єргіна О.В. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2018. 448 с.
22. Концепція профільного навчання в старшій школі: Наказ Міністерства освіти і науки № 1456 від 21.10.2013.

23. Кравчук В. Р., Підручна М. В., Янченко Г. М. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Тернопіль: Підручники і посібники, 2015. 224 с.
24. Крамор В.С. Повторюємо і систематизуємо шкільний курс алгебри і початків аналізу. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. 480 с.
25. Кушнір І.А., Фінкельштейн Л.П. Математика в задачах і прикладах: 101 порада абітурієнту. Київ:Факт, 2004. 304 с.
26. Кушнірук А.С. Шкільний курс математики і методика його навчання: алгебра основної школи. Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів денної форми навчання. Одеса: ФОП Бондаренко М.О., 2018. 60 с.
27. Лов'янова І.В. Методика навчання математики у запитаннях і відповідях. Навчальний посібник для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти. Кривий Ріг: Криворізький державний педагогічний університет, 2016. 78 с.
28. Лов'янова І.В., Шипорко С.Г. Математика: довідник-тренажер. Частина 1. Арифметика. Алгебра. Черкаси: Видавець Ю. Чабаненко, 2014. 152 с.
29. Мальований Ю.І., Литвиненко Г.М., Бойко Г.М. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2015. 256 с.
30. Матвієнко Т.М. Задачі алгебри многочленів у старшій профільній школі. *Наукові записки молодих вчених*. № 4. 2019. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1633/pdf> (дата звернення: 15.04.2023).
31. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 7 кл. закладів загал. серед. освіти. Харків: Гімназія, 2020. 288 с.
32. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2021. 383 с.

33. Методика навчання і наукових досліджень у вищій школі. / С.У. Гончаренко та інші. Київ: Вища школа, 2003. 323 с.

34. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів з математики для 5-9 класів: наказ Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804.

35. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів / М.І. Бурда та інші: наказ Міністерства освіти і науки від 07.06.2017 р. № 804.

36. Навчальна програма з математики (профільний рівень) для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл: Наказ Міністерства освіти і науки № 1407 від 23 жовтня 2017 року.

37. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів: наказ Міністерства освіти і науки № 1407 від 23 жовтня 2017 року.

38. Нелін Є.П. Алгебра в таблицях: навчальний посібник для учнів 7-11 класів. Харків: Світ дитинства, 1998. 116 с.

39. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків: Ранок, 2018. 272 с.

40. Нестандартні та олімпіадні задачі з алгебри та аналізу. / С.В. Боднарчук та інші. Київ: КПП ім. Ігоря Сікорського, 2020. 183 с.

41. Олімпіадні задачі: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2014: навчальний посібник. / О.А. Кадубовський та інші. Слов'янськ: видавничий центр «Маторін», 2015. 64 с.

42. Олексієнко Ю.О. Елементи теорії многочленів у шкільній алгебрі: кваліфікаційна магістерська робота за спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика). Ніжин, 2021. 62 с.

43. Організація навчання математики у старшій профільній школі: монографія / за ред. Н.А. Тарасенкової. Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко, 2017. 216 с.

44. Павлович В.С. Анализ ошибок абитуриентов по математике. Киев: Вища школа, 1975. 232 с.

45. Печена К. Особливості вивчення многочленів в шкільному курсі математики засобами ІКТ. *Інноваційні педагогічні технології в цифровій школі: тез доп. учасників IV Всеукр. (з міжнар. участю) наук.-практ. конф. молод. учених, Харків, 11–12 трав. 2022 р. / Харків. нац. пед. ун-т ім. Г.С. Сковороди, 2022. С. 210–212.*

46. Сисоєва С.О., Кристопчук Т.Є. Методологія науково-педагогічних досліджень: підручник. Рівне: Волинські обереги, 2013. 360 с.

47. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике: методическое пособие. Київ: Радянська школа, 1983. 192 с.

48. Слепкань З.І. Методика навчання математики: підручник. Київ: Вища шк., 2006. 582 с.

49. Слепкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. 240 с.

50. Сторчай В.Ф., Приходько В.В. Готуємося до олімпіади. Многочлени: навч. посіб. М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». Дніпро: НТУ «ДП», 2021. 135 с.

51. Табачник Ю.Д. Деякі питання теорії многочленів та їх застосування в курсі математики профільної школи: кваліфікац. робота на здобуття освіт. ступеня магістр: спец. 014 Середня освіта (Математика); Харків. нац. пед. ун-т ім. Г.С. Сковороди, каф. математики. Харків, 2021. 96 с.

52. Табачник Ю.Д., Дейніченко Т.І. Елементи теорії многочленів. *Наумовські читання: матеріали XVII студ. наук. конф. студ. та молод. вчених, присвяч. 80-річчю фіз.-мат. ф-ту, Харків, 14–15 листоп. 2019 р. / Харків. нац. пед. ун-т ім. Г. С. Сковороди, 2019. С. 102–104.*

53. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики: монографія. Черкаси: Відлуння-Плюс, 2002. 400 с.



54. Ушаков Р.П. Повторювальний курс математики: посібник для учнів серед. закладів освіти. Київ: Техніка, 1999. 504 с.
55. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики: посібник для загальноосвітніх навчальних закладів. Чернівці, 2004. 360 с.
56. Халецька З.П., Ізюмченко Л.В. Вивчення алгебри многочленів із застосуванням комп'ютерних засобів. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск 4*. Кривий Ріг: Видавн. центр НметАУ, 2004. Т. 1. С. 286–290.
57. Цейтлін О.І. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків: Вид-во «Ранок», 2015. 208 с.
58. Черкасов Р.С., Столяр А.А. Методика викладання математики в середній школі: навч. посібник. Харків: Основа, 1992. 304 с.
59. Чоп'юк Ю.Ю. Елементи теорії многочленів в шкільному курсі алгебри: дипломна робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр» за спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика). Івано-Франківськ, 2020. 74 с.
60. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. 208 с.

## ДОДАТКИ

### Додаток А

#### Анкета для вчителя математики

Шановні вчителі! Просимо Вас відповісти на наступні запитання з метою з'ясування стану та особливостей засвоєння старшокласниками теми «Многочлени».

1. У яких класах Ви викладаєте математику?
2. Чи є тема «Многочлени» необхідною для вивчення у старшій школі?
  - а) Ні, достатньо того матеріалу, що вивчали учні в основній школі.
  - б) Так, тема необхідна для подальшого навчання у ВНЗ.
  - в) Ваша відповідь: \_\_\_\_\_.
3. Чи добре учні засвоюють тему «Многочлени»? Вкажіть скільки процентів учнів (приблизно) засвоюють дану тему на високому і достатньому рівнях?
4. З якими проблемами стикаються старшокласники при вивченні теми «Многочлени»? Які помилки допускають?
5. Які питання з даної теми є для учнів найскладнішими?
6. Чи добираєте Ви додатково задачі на многочлени та їх застосування?
  - а) Так, у підручнику їх мало;
  - б) Ні, вистачає задач з підручника.
7. Яким чином Ви намагаєтесь зацікавити учнів у вивченні даної теми?
8. Чи застосовуєте Ви на уроках математики інтерактивні технології?
  - а) Так; Якщо «так», то вкажіть, які саме.
  - б) Ні.
9. Чи застосовуєте Ви на уроках математики інформаційно-комунікаційні технології?
  - а) Так; Якщо «так», то вкажіть, які саме.
  - б) Ні.

Дякуємо Вам за конструктивні та відверті відповіді!

## Додаток Б

### Перевірочна контрольна робота на повторення теми

#### «Многочлени та дії над ними» для 10 класу

1) Спростити вираз та визначити степінь многочлена:

$$(x-1)^2 - x^2 + (x+1)^2 - (x+2)^2.$$

2) Розкласти многочлен на множники:

а)  $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2$ ;

б)  $a^2 + x^2 - a^2x^2 + 4ax - 1$ .

3) Визначити корені многочлена:

$$x(x-10) - (x+1)(x-2) - 2.$$

4) Відомо, що  $x=1$  є коренем многочлена  $(x^4+1)(x+2) - (x+a)(x^2+1)$

. Знайти значення  $a$ .

5) Відомо, що  $x_1$  та  $x_2$  – корені рівняння  $x^2 - 9x + 6 = 0$ . Не розв'язуючи рівняння, знайти значення наступних виразів:

1)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ;

2)  $x_1^2 + x_2^2$ ;

3)  $(x_1 - x_2)^2$ ;

4)  $x_1^3 + x_2^3$ .

## Додаток В

### *Уроки з алгебри та початків аналізу з теми «Многочлени» для 10 класу (профільний рівень)*

#### Урок 1

**Тема:** Многочлени, дії над ними. Ділення многочленів.

**Мета:**

**навчальна:** повторити раніше вивчений матеріал про многочлени та дії над ними, розглянути особливості виконання ділення многочленів; розв'язати завдання на спрощення виразів, що містять многочлени;

**розвивальна:** розвивати самостійність, пам'ять та логічне мислення старшокласників;

**виховна:** виховувати уважність та культуру математичних записів.

**Тип уроку:** комбінований урок.

**Обладнання:** підручник з алгебри Неліна Є.П. [39], дошка, кольорова крейда, картки із завданнями, дидактичний роздатковий матеріал.

#### *Хід уроку*

##### **1. Організаційний етап (2 хв).**

Привітання та перевірка готовності учнів до уроку.

##### **2. Постановка мети та завдань уроку (2 хв).**

*Учитель повідомляє тему уроку, знайомить учнів з метою та завданнями уроку.*

Сьогодні на уроці ми повторимо раніше вивчений матеріал про многочлени та дії над ними (додавання, віднімання та множення), познайомимося із ще однією дією – ділення та навчимося її застосовувати при розв'язуванні відповідних завдань.

##### **3. Мотивація навчальної діяльності учнів (3 хв).**

Многочлени, з якими ми будемо працювати на сьогоднішньому уроці, відіграють важливу роль не лише в математиці, але й інших сферах науки, техніки та повсякденного життя. Многочлени стали активно використовувати для вирішення важливої проблеми ХХ століття – якісної та безпечної передачі

інформації. Повідомлення, з математичної точки зору, є послідовністю різних символів, які прийнято, як ми знаємо з курсу інформатики, кодувати. Один із основних способів кодування пов'язаний з многочленами та діями над ними, який можна описати наступним чином: спочатку із послідовності сигналів складається формальний многочлен, потім підбирається кодуючий многочлен  $Q(x)$ , який множиться на многочлен  $P(x)$  і передається послідовність коефіцієнтів добутку многочленів. Основним завданням, що допоможе розкодувати повідомлення є запис кодуючого многочлена  $Q(x)$ , який можна знайти за допомогою операції ділення многочленів.

#### 4. Актуалізація і корекція опорних знань (8 хв).

Учням пропонуються завдання на повторення вивченого матеріалу про многочлени та дії над ними.

1) Многочленом називається \_\_\_\_\_.

2) Розкласти многочлен на множники:  $b^2 + 6b + 9 - 25c^2$ .

3) Дано многочлени  $P(x) = x^2 + 3x - 1$  та  $G(x) = 2x + 3$ .

Знайти: а)  $P(x) + G(x)$ ; б)  $P(x) - G(x)$ ; в)  $P(x) \cdot G(x)$ .

За допомогою способу взаємоперевірки (учні обмінюються зошитами з сусідами по парті) виконується перевірка правильності виконання завдання. Вчитель на дошці демонструє правильні відповіді, учні перевіряють відповіді однокласника.

1) алгебраїчна сума одночленів	2) $(b + 3 - 5c)(b + 3 + 5c)$	3) а) $x^2 + 5x + 2$ ; б) $x^2 + x - 4$ ; в) $2x^3 + 9x^2 + 7x - 3$ .
-----------------------------------	----------------------------------	--

#### 5. Сприймання нових знань (10 хв)

Ми повторили означення многочлена та дії над многочленами.

Вчитель пропонує учням попрацювати з підручником [39].

Відкрийте підручник на стр. 50 та знайдіть значення одночлена та многочлена від однієї змінної.

Крім суми, різниці та добутку многочленів ми будемо виконувати ділення многочлена на многочлен, причому ділення виконується як з остачею, так і націло. Будь ласка, прочитайте означення на стр. 53.

Ділення многочлена на многочлен прийнято виконувати «кутом».

Учні знайомляться із сутністю цього способу (вчитель пропонує учням роздатковий дидактичний матеріал з теорією та прикладом розв'язання) (більш детально у пункті 1.1).

### 6. Застосування знань учнів при розв'язуванні завдань (15 хв).

Вчитель пропонує учням виконати ділення многочленів  $P(x) = x^2 + 3x - 1$  на  $G(x) = 2x + 3$ . Один учень працює біля дошки, інші самостійно на місцях.

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 3x - 1 \quad | 2x + 3 \\
 - x^2 + \frac{3}{2}x \quad \quad \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \\
 \hline
 \frac{3}{2}x - 1 \\
 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \\
 \hline
 \frac{13}{4}
 \end{array}$$

$$x^2 + 3x - 1 = (2x + 3) \left( \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \right) - \frac{13}{4}.$$

Отже, ми розглянули ділення з остачею.

Розв'яжемо завдання №7.2.1 (3) за підручником [39], де необхідно націло поділити многочлен на многочлен.

Один учень працює біля дошки, інші самостійно на місцях.

№7.2.1 (3).

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 3x^3 + 8x - 6 \quad | x^2 + 2x + 3 \\
 - x^5 + 2x^4 + 3x^3 \quad \quad x^3 - 2x^2 + 4x - 2 \\
 \hline
 -2x^4 - 4x^3 - 6x^2 \\
 - -2x^4 - 4x^3 - 6x^2 \quad \quad 4x^3 + 6x^2 + 8x \\
 \hline
 4x^3 + 8x^2 + 12x \\
 - 4x^3 + 8x^2 + 12x \quad \quad -2x^2 - 4x - 6 \\
 \hline
 -2x^2 - 4x - 6 \\
 - -2x^2 - 4x - 6 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Вчитель пропонує учням самотійно виконати завдання №7.2.3 (1) за підручником [39]. Учні виконують завдання, а потім відбувається перевірка одержаної відповіді.

№7.2.3 (1)

$$\begin{array}{r}
 x^3 + ax + b \quad | \quad x^2 + 5x + 7 \\
 - x^3 + 5x^2 + 7x \quad \quad x - 5 \\
 \hline
 -5x^2 + (a-7)x + b \\
 - (-5x^2 - 25x - 35) \\
 \hline
 (a+18)x + (b+35) \\
 \hline
 =0
 \end{array}$$

Тоді,  $a = -18$ ,  $b = -35$ .

## 6. Підсумки уроку (3 хв).

Давайте ще раз повторимо вивчений сьогодні матеріал. Що таке многочлен від однієї змінної? Які дії над многочленами ви вмієте виконувати?

*Оцінювання учнів.*

## 7. Домашнє завдання (2 хв).

Повторити теоретичний матеріал з підручника [39]: параграфи 7.1, 7.2.

Розв'язати завдання № 7.2.1 (1) та 7.1.4 (2)\*.

Самотійно розібратися з методом невизначених коефіцієнтів та виконати завдання № 7.2.4 (1).

## Урок 2

**Тема:** Теорема Безу та наслідки з неї.

**Мета:**

**навчальна:** розглянути основні теоретичні відомості з даної теми, навчитися застосовувати теорему Безу та її наслідки до розв'язування задач;

**розвивальна:** розвивати пізнавальну активність та дослідницькі здібності учнів;

**виховна:** виховувати зосередженість та увагу.

**Тип уроку:** засвоєння нових знань.

**Обладнання:** підручник з алгебри Неліна Є.П. [39], дошка, крейда, ноутбук, проектор.

*Хід уроку*

**1. Організаційний момент (2 хв).** Привітання. Підготовка та налаштування учнів на продуктивну роботу на уроці.

**2. Повідомлення теми, мети та завдань. Мотивація навчання (3 хв).**

Сьогодні ми розглянемо цікаву та важливу тему з алгебри і початків аналізу «Теорема Безу та наслідки з неї», яка широко використовується при розв'язуванні задач на многочлени. Ви спробуєте її самостійно сформулювати, але спочатку пригадайте, що ми вивчали на тому уроці?

*Відповіді учнів та повторення теоретичного матеріалу.*

**3. Перевірка домашнього завдання (3 хв).**

Одним із ваших завдань було самостійно розібратися з методом невизначених коефіцієнтів та застосувати його при розв'язуванні завдання № 7.2.4 (1) з підручника [39].

*Вчитель перевіряє правильність виконання учнями даного завдання шляхом демонстрації на екрані правильної відповіді. Учні, що правильно розв'язали – піднімають руку.*

Потім вчитель демонструє на екрані повне розв'язування завдання, а учні перевіряють правильність відповідних записів – кожен у своєму зошиті.

№ 7.2.4 (1). Знайти неповну частку і остачу при діленні многочлена  $A(x)$  на многочлен  $B(x)$  методом невизначених коефіцієнтів:  
 $A(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ,  $B(x) = x^2 - 1$ .

*Розв'язання.*

Оскільки старші коефіцієнти многочлена і двочлена співпадають, то частку запишемо у вигляді  $x + a$ . Остачу позначимо як  $rx + d$ .

Отже,  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x^2 - 1)(x + a) + (rx + d)$ . Розкриємо дужки та зведемо подібні доданки:  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 + ax^2 + (r - 1)x + (d - a)$ .

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях у лівій та правій частинах рівності, одержимо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a = 6, \\ r - 1 = 11, \\ d - a = 6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6, \\ r = 12, \\ d = 12. \end{cases}$$



Таким чином, при діленні многочлена  $A(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$  на многочлен  $B(x) = x^2 - 1$  одержали неповну частку  $x + 6$  та остачу  $12x + 12$ .

#### 4. Актуалізація і корекція опорних знань (5 хв).

*Перш ніж перейти до вивчення нової теми, вчитель пропонує учням повернутися знову до домашнього завдання, де необхідно було поділити многочлен  $3x^3 - 5x^2 + 2x - 8$  на двочлен  $x - 2$ .*

Вчитель: Чому дорівнює остача від ділення даного многочлена на двочлен?

Учні: остача від ділення дорівнює нулю.

*Вчитель пропонує учням підставити у многочлен  $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 8$  замість  $x$  значення 2, тобто знайти  $P(2)$ . Визначивши  $P(2) = 3 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 8 = 24 - 20 + 4 - 8 = 0$  учні помічають значення многочлена у точці співпадає з остачею від ділення многочлена на двочлен. Вчитель наголошує, що таким способом можна знаходити остачу від ділення многочлена на двочлен і цей важливий факт є теоремою Безу. Учні самостійно намагаються його сформулювати.*

#### 4) Сприймання і засвоєння нової навчальної інформації (27 хв).

Ми з вами спробували самостійно сформулювати теорему Безу, пропоную за підручником ознайомитися з важливими наслідками з цієї теореми (більш детально у пункті 1.1).

Повертаючись до попереднього завдання, слід зауважити, що  $x = 2$  є коренем многочлена  $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 8$ , причому інших дійсних коренів заданий многочлен не має (Чому? Учні пояснюють цей факт).

Розв'яжемо завдання з підручника (один учень біля дошки, інші на місцях).

#### № 7.3.2.

Визначити коефіцієнт  $a$ , якщо відомо, що остача від ділення многочлена  $x^3 - ax^2 + 5x - 3$  на  $x - 1$  дорівнює 6.

*Розв'язання.*

За теоремою Безу остача від ділення многочлена  $P(x) = x^3 - ax^2 + 5x - 3$  на  $x - 1$  дорівнює  $P(1) = 1^3 - a \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 3 = 3 - a$ , що за умовою дорівнює 6.

Отже,  $3 - a = 6 \Rightarrow a = -3$ .

№ 7.3.4.

При яких значеннях  $a$  і  $b$  многочлен  $x^4 + 2x^3 + ax^2 - bx + 2$  ділиться без остачі на  $x + 2$ , а при діленні на  $x - 1$  дає остачу, що дорівнює 3?

*Розв'язання.*

За наслідком з теореми Безу  $x + 2$  є коренем многочлена  $P(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ , тобто  $P(-2) = 0$ . Тоді,  
 $P(-2) = (-2)^4 + 2(-2)^3 + a(-2)^2 - b(-2) + 2 = 16 - 16 + 4a + 2b + 2 = 4a + 2b + 2$ ,  
 $4a + 2b + 2 = 0$ .

Відповідно до другої умови задачі за теоремою Безу маємо, що  $P(1) = 3$ .

Отже,  $P(1) = 1^4 + 2 \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 - b \cdot 1 + 2 = 5 + a - b$ ,  $5 + a - b = 3$ .

Для знаходження значень  $a$  і  $b$  розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -2, \\ a - b = -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(b - 2) + 2b = -2, \\ a = b - 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6b = 6, \\ a = b - 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1, \\ a = -1. \end{cases}$$

### 5) Підсумок уроку (2 хв).

Вчитель пропонує учням продовжити речення:

«На сьогоднішньому уроці ми вивчили ...» (*рефлексія*). Зауважимо, що теорема Безу та наслідки з неї широко застосовуються до розв'язування рівнянь.

### б) Домашнє завдання (3 хв).

*Вчитель коментує задачі.*

Розв'язати завдання з підручника № 7.3.1, 7.3.3. *Обговорення розв'язання цих завдань планується провести на наступному уроці.*

Підготувати повідомлення про внесок Е. Безу та Ф. Вієта у розвиток алгебри многочленів. Розглянути алгоритм знаходження коренів многочлена

$P(x) = 6x^4 + 7x^3 - 22x^2 - 28x - 8$  (див. табл. 2.2, ділення многочлена на двочлен виконувати «кутом»).

### Урок 3

**Тема:** Розв'язування алгебраїчних рівнянь.

**Мета:**

**навчальна:** навчитися застосовувати теорію многочленів до розв'язування алгебраїчних рівнянь;

**розвивальна:** розвивати креативність, логічну пам'ять та дослідницькі здібності учнів;

**виховна:** виховувати ініціативність та наполегливість.

**Тип уроку:** урок формування умінь та навичок.

**Обладнання:** підручник з алгебри Неліна Є.П. [39], дошка, крейда, ноутбук, проектор, картки із завданнями.

#### Хід уроку

##### 1. Організаційний етап (2 хв).

Перевірка готовності учнів до уроку.

##### 2. Постановка мети та завдань уроку (2 хв).

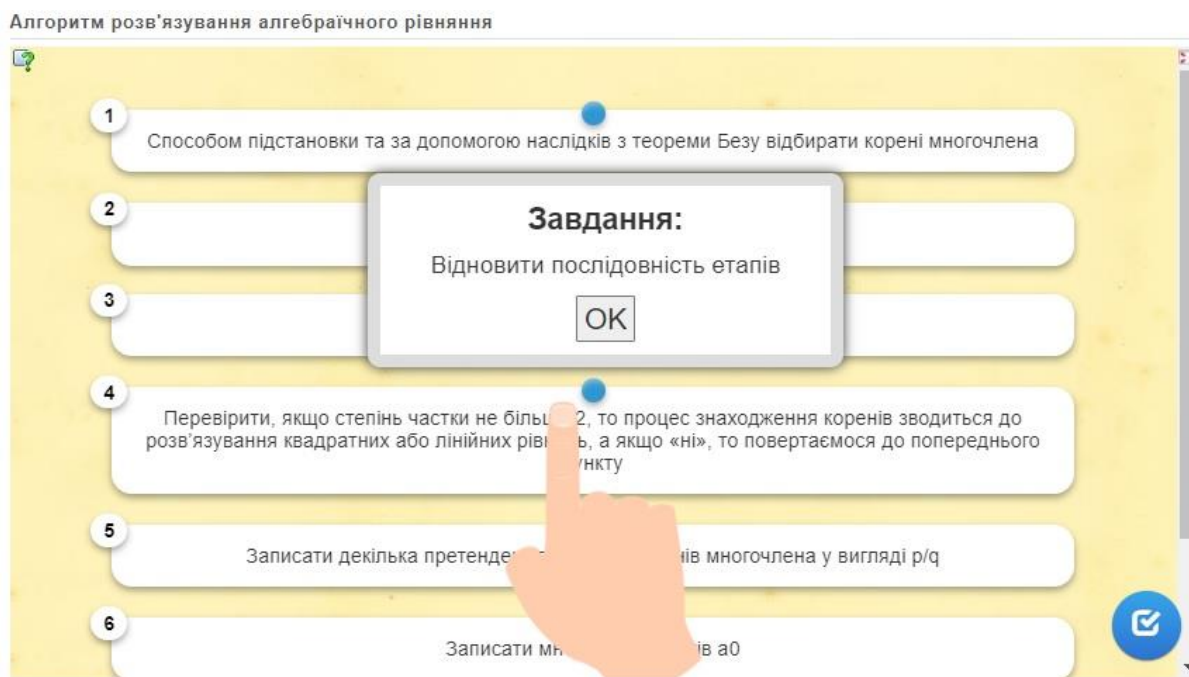
*Учитель повідомляє тему уроку, знайомить учнів з метою та завданнями уроку.*

Сьогодні ми на уроці навчимося застосовувати теорію многочленів при розв'язуванні рівнянь, а також наприкінці уроку розв'яжемо самостійну роботу.

##### 3. Актуалізація і корекція опорних знань (6 хв).

*Фронтальна форма роботи.*

Давайте разом повторимо основні етапи розв'язування рівняння. Учні виконують інтерактивну вправу у хмарному додатку *Learning Apps* і по черзі називають основні етапи, вчитель їх послідовно демонструє на слайді (рис. В.1).



**Рис. В.1. Алгоритм знаходження коренів многочлена**

#### **4. Мотивація навчальної діяльності учнів (5 хв).**

Е. Безу та Ф. Вієта зробили значний внесок у розвиток алгебри многочленів. Давайте прослухаємо повідомлення, підготовлені вашими однокласниками.

Французький математик Етьєн Безу (1730-1783) розробив спосіб розв'язування систем алгебраїчних рівнянь довільного степеня, що ґрунтується на методі невизначених коефіцієнтів. Відомим є його посібник «Курс математики» у шести томах, який він написав готуючи французьких артилерійських офіцерів з 1764 по 1769 роки. У своїй викладацькій діяльності Безу надавав перевагу практичній підходу, саме тому розроблений ним посібник був дуже популярним на той час. У 1774 році сформулював та довів теорему про ділення многочленів з остачею, що названа в честь його імені. Теорема Безу широко застосовується при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь вищих степенів.

Франсуа Вієт (1540-1603) – французький математик, основоположник символічної алгебри (фактично ввів саме поняття математичної формули), творець теореми про властивості коренів квадратного рівняння. Був юристом

за освітою та радником французьких королів. Математика для нього була головним важливим хоббі, що, передусім дозволяла розв'язувати складні та важливі на той час завдання державного значення, зокрема вчений розшифрував перехоплені повідомлення під час війни між Францією та Іспанією, тим самим прискоривши перемогу Франції. У зв'язку з цим іспанська інквізиція оголосила Вієта боговідступником та чаклуном, присудила його до спалення на вогнищі, проте король Франції захистив свого радника і помічника. Вчений також займався тригонометрією та геометрією, намагаючись встановити місток між алгеброю а геометрією. Вієт досі є одним із найзнаменитіших математиків світу та «батьком алгебри».

### **5. Формування навичок та умінь учнів при розв'язуванні практичних завдань (25 хв).**

Спочатку ми підготуємося до розв'язування завдань, повторимо знаходження етапи знаходження коренів многочлена  $P(x) = 6x^4 + 7x^3 - 22x^2 - 28x - 8$  (див. табл. 2.2).

Наступне завдання розв'яжемо письмово з коментуванням.

*Коментоване розв'язування завдань. Один учень працює біля дошки, інші учні самостійно розв'язують завдання на своїх місцях.*

Знайти корені рівняння  $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = 0$ .

*Розв'язання.*

Так як многочлен має цілі коефіцієнти, то будемо знаходити раціональні корені рівняння у вигляді нескоротного дробу  $\frac{p}{q}$ , де  $p$  – дільники вільного члена, а  $q$  – дільниками старшого коефіцієнта.

Отже,  $p: \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12$ ;  $q: \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$ , тобто

$$\frac{p}{q}: 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; 6; -6; 12; -12; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{6}; \frac{4}{6}; -\frac{4}{6}.$$

Як бачимо претендентів на корені досить багато.

Значно зменшити кількість претендентів на корені рівняння можна, застосувавши умову  $\frac{f(1)}{p-q} \in \mathbb{Z}; \frac{f(-1)}{p+q} \in \mathbb{Z}$ , де  $f(1) = 6 + 19 - 7 - 26 + 12 = 4$ ,

$$f(-1) = 6 - 19 - 7 + 26 + 12 = 18.$$

Отже, перевіримо, що вирази  $\frac{4}{p-q}$  та  $\frac{18}{p+q}$  є цілими числами.

Отримали, що кількість претендентів на корені значно зменшилася:

$$\frac{p}{q} : \cancel{1}; \cancel{1}; \boxed{2}; \cancel{2}; \cancel{3}; \boxed{-3}; \cancel{4}; \cancel{4}; \cancel{6}; \cancel{6}; \cancel{12}; \cancel{12}; \cancel{\frac{3}{2}}; \cancel{\frac{3}{2}}; \boxed{\frac{1}{2}}; \cancel{\frac{1}{2}}; \cancel{\frac{2}{3}}; \cancel{\frac{2}{3}};$$

$$\cancel{\frac{1}{3}}; \boxed{-\frac{1}{3}}; \cancel{\frac{1}{6}}; \cancel{\frac{1}{6}}; \cancel{\frac{4}{3}}; \cancel{\frac{4}{3}}.$$

Можна безпосередньо підставити отримані числа в рівняння та, користуючись наслідком з теореми Безу, зробити висновок про те чи є задане число коренем рівняння.

Отже,  $x = -3$  та  $x = \frac{1}{2}$  є коренями рівняння.

$$\text{Дійсно, } 6(-3)^4 + 19(-3)^3 - 7(-3)^2 - 26(-3) + 12 = 486 - 513 - 63 + 78 + 12 = 0,$$

$$6\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 19\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 26\left(\frac{1}{2}\right) + 12 = \frac{3}{8} + \frac{19}{8} - \frac{7}{4} - 13 + 12 = 0.$$

Понизимо степінь заданого многочлена, розділивши його на добуток коренів

$$(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right) = x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}.$$

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 \Big| x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \\ \underline{-6x^4 + 15x^3 - 9x^2} \phantom{- 26x + 12} \\ 4x^3 + 2x^2 - 26x \phantom{+ 12} \\ \underline{-4x^3 + 10x^2 - 6x} \phantom{+ 12} \\ -8x^2 - 20x + 12 \\ \underline{-8x^2 - 20x + 12} \\ 0 \end{array}$$

Розв'язавши відповідне квадратне рівняння, отримаємо ще два корені:

$$6x^2 + 4x - 8 = 0 \text{ або } 3x^2 + 2x - 4 = 0, \quad \frac{D}{4} = 1 - 3 \cdot (-4) = 13 > 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}.$$

Отже, рівняння має чотири корені:  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}$ .

При розв'язуванні алгебраїчних рівнянь вищих порядків також застосовується співвідношення між коефіцієнтами та коренями, які називаються узагальненою теоремою Вієта (учні працюють з матеріалом підручника [39, с. 56]).

Розв'яжемо завдання на застосування теореми Вієта.

№ 7.3.12.

Скласти квадратне рівняння, корені якого протилежні кореням рівняння  $x^2 - 5x + 1 = 0$ .

*Розв'язання.*

Нехай  $x_1$  та  $x_2$  – корені рівняння  $x^2 - 5x + 1 = 0$ , причому  $x_1 + x_2 = 5$  і  $x_1 x_2 = 1$ .

Тоді, корені шуканого рівняння дорівнюють:  $\alpha_1 = -x_1$ ,  $\alpha_2 = -x_2$ , де рівняння

має вигляд  $x^2 + px + q = 0$ , де  $p = -(\alpha_1 + \alpha_2) = -(-x_1 - x_2) = x_1 + x_2$ ,

$q = \alpha_1 \alpha_2 = (-x_1)(-x_2) = x_1 x_2$  Тоді, шукане рівняння матиме вигляд:

$$x^2 + 5x + 1 = 0.$$

## 6. Підсумки уроку (3 хв).

**Рефлексія.** Дати відповіді на запитання:

1. Над якою темою працювали на уроці?
2. Що нового дізналися при вивченні даної теми?
3. Чого навчилися, готуючи матеріал?
4. Що складного було на уроці?
5. Чим запам'ятався урок?
6. Де зможете застосувати одержану інформацію?

*Оцінювання учнів.*

### 7. Домашнє завдання (2 хв).

Повторити теоретичний матеріал з підручника [39]: параграф 7.3.

Розв'язати 7.3.9, 7.3.14 та додаткову прикладну задачу підвищеної складності на застосування теореми Вієта (завдання вчитель пропонує на картках): «Ребра прямокутного паралелепіпеда є коренями многочлена  $P_3(x) = x^3 - 20x^2 + 125x - 244$ . Знайти об'єм, площу поверхні та діагональ паралелепіпеда» [30].

## Урок 4

**Тема:** Розв'язування задач і вправ. Підготовка до контрольної роботи

**Мета:**

**навчальна:** продемонструвати свої знання, навички та уміння при розв'язуванні різноманітних завдань з алгебри многочленів;

**розвивальна:** розвивати логічну пам'ять, критичне мислення та математичні здібності старшокласників;

**виховна:** виховувати самостійність, математичну мову та культуру ведення математичних записів.

**Тип уроку:** урок застосування знань, умінь та навичок.

**Обладнання:** дошка, крейда, ноутбук, проектор, картки із завданнями, роздатковий дидактичний матеріал.

### Хід уроку

#### 1. Організаційний етап (2 хв).

Привітання, перевірка присутніх та готовності учнів до уроку.

#### 2. Постановка мети та завдань уроку (2 хв).

*Учитель повідомляє тему, мету та завдання уроку.*

На сьогоднішньому уроці ми повторимо вивчений нами матеріал з теми «Многочлени» та підготуємося до написання контрольної роботи.

#### 3. Мотивація навчальної діяльності учнів (3 хв).

Давайте з вами побудемо у ролі експертів та вирішимо самостійно наступні питання:

1) Які вирази називаються многочленами?



2) Де застосовуються многочлени?

3) Як нам можуть знадобитися многочлени у повсякденному житті?

### 3. Актуалізація і корекція опорних знань (5 хв).

Фронтальна форма роботи.

На попередньому уроці ми з вами вивчали узагальнену теорему Вієта, давайте її пригадаємо. Пропоную попрацювати з інтерактивними вправами.

*Вчитель пропонує інтерактивні вправи у додатку Learning Apps, де необхідно розв'язати завдання на застосування теореми Вієта для знаходження значень відповідних виразів.*

Задано многочлен  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ , коренями якого є числа  $x_1, x_2, x_3$ .

Знайти значення наступних виразів: 1)  $x_1 + x_2 + x_3$ ; 2)  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ ;

3)  $x_1x_2x_3$ ; 4)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ ; 5)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  (рис. В.2).



**Рис. В.2. Інтерактивна вправа на узагальнену теорему Вієта**

### 5. Застосування знань учнів при розв'язуванні практичних завдань (28 хв).

Переходимо до письмового розв'язування різних завдань.

**Завдання 1.** Поділити многочлен  $2x^3 - 3x + 2$  на двочлен  $(2x - 1)$  за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Перевірити відповідь діленням «кутом».

*Розв'язання.*

Оскільки старші коефіцієнти многочлена і двочлена співпадають, то частку запишемо у вигляді  $x^2 + bx + c$ . Остачу позначимо як  $r$ .

Отже,  $2x^3 - 3x + 2 = (x^2 + bx + c)(2x - 1) + r$ . Розкриємо дужки та зведемо подібні доданки:  $2x^3 - 3x + 2 = 2x^3 + (2b - 1)x^2 + (2c - b)x + (r - c)$ .

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях у лівій та правій частинах рівності, одержимо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2b - 1 = 0, \\ 2c - b = -3, \\ r - c = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2}, \\ c = -\frac{5}{4}, \\ r = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Таким чином, при діленні многочлена  $2x^3 - 3x + 2$  на двочлен  $(2x - 1)$  одержали неповну частку  $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$  та остачу  $\frac{3}{4}$ .

Перевіримо виконання даного ділення многочленів методом «кута».

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x + 2 \overline{) 2x - 1} \\ \underline{2x^3 - x^2} \phantom{+ 2} \\ x^2 - 3x \phantom{+ 2} \\ \underline{x^2 - \frac{1}{2}x} \phantom{+ 2} \\ \frac{5}{2}x + 2 \\ \underline{-\frac{5}{2}x + \frac{5}{4}} \\ \frac{3}{4} \end{array}$$

Отже, ділення виконано правильно.

**Завдання 2.** Знайти корені рівняння  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$  користуючись теоремою Безу і її наслідками та теоремою Вієта.

*Розв'язання.*

За теоремою Вієта для заданого кубічного рівняння маємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 11, \\ x_1x_2x_3 = 6. \end{cases}$$

Як бачимо, із одержаної системи визначити корені рівняння досить складно, тому підберемо один з коренів. За наслідком з теореми Безу коренем заданого рівняння є  $x = 1$ .

Тоді, отримаємо систему з двома невідомими та знайдемо її розв'язок:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_2x_3 = 11, \\ x_2x_3 = 6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5 - x_3, \\ x_3(5 - x_3) = 6; \end{cases} \Rightarrow x_3^2 - 5x_3 + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3^{(1)} = 2, \\ x_3^{(2)} = 3; \\ x_2^{(1)} = 3, \\ x_2^{(2)} = 2. \end{cases}$$

Таким чином, рівняння має три різні корені:  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ .

**Завдання 3.** Розв'язати рівняння  $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$ .

*Розв'язання.*

Враховуючи, що  $a_0 = 50$ , то претендентів на корені буде досить велика кількість. Щоб не записувати їх всіх, доцільно спочатку перевірити та підібрати більш хоча б один корінь, що є цілим числом. Неважко помітити, що коренем заданого рівняння є  $x_1 = 1$ .

Понизимо степінь многочлена  $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50$ , поділивши його на двочлен  $(x - 1)$ :

$$\begin{array}{r}
 2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 \overline{) x - 1} \\
 \underline{- 2x^4 - 2x^3} \phantom{+ 74x^2 - 105x + 50} \\
 -19x^3 + 74x^2 \phantom{- 105x + 50} \\
 \underline{- -19x^3 + 19x^2} \phantom{- 105x + 50} \\
 55x^2 - 105x \phantom{+ 50} \\
 \underline{- 55x^2 - 55x} \phantom{+ 50} \\
 -50x + 50 \\
 \underline{- -50x + 50} \\
 0
 \end{array}$$

Отримали рівняння 3-го порядку:  $2x^3 - 19x^2 + 55x - 50 = 0$ .

Одиниця не є коренем рівняння, перевіримо двійку.

За наслідком з теореми Безу  $x = 2$  є коренем рівняння  $2x^3 - 19x^2 + 55x - 50 = 0$ , тому понизимо його порядок, поділивши на двочлен  $(x - 2)$ :

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - 19x^2 + 55x - 50 \overline{) x - 2} \\
 \underline{- 2x^3 - 4x^2} \phantom{+ 55x - 50} \\
 -15x^2 + 55x \phantom{- 50} \\
 \underline{- -15x^2 + 30x} \phantom{- 50} \\
 25x - 50 \\
 \underline{- 25x - 50} \\
 0
 \end{array}$$

Отримали рівняння 2-го порядку:  $2x^2 - 15x + 25 = 0$ , знайдемо його корені.

$$2x^2 - 15x + 25 = 0,$$

$$D = 225 - 4 \cdot 2 \cdot 25 = 225 - 200 = 25 = 5^2 > 0,$$

$$x_3 = \frac{15 + 5}{4} = 5, \quad x_4 = \frac{15 - 5}{4} = \frac{5}{2}.$$

Отже, задане рівняння має чотири корені  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 5$ ,  $x_4 = \frac{5}{2}$ .

## 6. Підсумки уроку (3 хв).

На сьогоднішньому уроці ми повторили основні теоретичні відомості та навчилися їх застосовувати до розв'язування практичних завдань. Які у вас будуть запитання? Що було найскладнішим?

*Оцінювання учнів.*

**7. Домашнє завдання (2 хв).**

Повторити теоретичний матеріал з підручника [39]: параграф 7.1, 7.2, 7.3.

Розв'язати завдання: 1) Розділити многочлен  $2x^4 + 3x - 4$  на многочлен  $x^2 - 1$  двома способами.

2) Знайти корені многочлена:  $3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10$ .

## **Урок 5**

**Тема:** Тематичне оцінювання з теми «Многочлени».

**Мета:**

**навчальна:** перевірити навчальні досягнення учнів при розв'язуванні контрольних завдань з алгебри многочленів;

**розвивальна:** розвивати самостійність, уважність;

**виховна:** виховувати культуру ведення математичних записів.

**Тип уроку:** урок контролю навчальних досягнень учнів.

**Обладнання:** дошка, крейда, картки із завданнями.

### **Хід уроку**

**1. Організаційний етап (2 хв).**

Привітання, перевірка присутніх та готовності учнів до уроку.

**2. Написання контрольної роботи (42 хв).**

*Вчитель математики роздає відповідні завдання з контрольної роботи на картках.*

### **Варіант 1**

1. Виконати ділення з остачею  $x^3 - 3x + 2$  на  $x - 2$  методом невизначених коефіцієнтів?

2. При яких значеннях  $a$  многочлен  $x^5 + a^2x^4 - 5x^3 + 3a - 7$  при діленні на двочлен  $x - 1$  дає в остачі  $-1$ ?

3. Яку кратність має корінь 2 для многочлена  $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x - 8$ ? Розкласти цей многочлен на множники.

4. Знайти суму квадратів коренів рівняння  $x^3 - 4x^2 - 3x + 10 = 0$ .

### **Варіант 2**

1. Виконати ділення з остачею  $x^4 - 3x^2 + 1$  на  $x - 2$  методом невизначених коефіцієнтів?

2. При яких значеннях  $a$  многочлен  $2ax^4 + 3x^3 - 4x^2 + 4x - 23 + a^2$  при діленні на двочлен  $x - 1$  дає в остачі  $-12$ ?

3. Яку кратність має корінь  $1$  для многочлена  $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$ ? Розкласти цей многочлен на множники.

4. Знайти суму квадратів коренів рівняння  $x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$ .

3. **Підсумки уроку (1 хв).** На сьогоднішньому уроці ми написали контрольну роботу з теми «Многочлени». Одержані результати повідомлю на наступному уроці.

#### **Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів при написанні контрольної роботи**

Рівень навчальних досягнень учнів	Бали	Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів
Високий	12	Робота виконана охайно та у повному обсязі
	11	У роботі є 1 чи 2 виправлення
	10	Робота містить 2 чи 3 виправлення або 1 негрубу помилку
Достатній	9	У роботі є 2 негрубі помилки або 1 груба помилка
	8	2/3 всіх завдань роботи виконано правильно
	7	У роботі допущені 3 грубих помилки або 2 грубі та 2 негрубі помилки
Середній	6	Робота містить 4 грубі помилки або 3 грубі і 1-2 негрубих помилки
	5	Половина завдань роботи виконана правильно
	4	У роботі допущені 5-6 грубих помилок і декілька негрубих
Початковий	3	У роботі допущено 7 грубих помилок або 6 грубих та 1-2 негрубих помилки
	2	Правильно розв'язана третина завдань роботи
	1	Робота виконана частково, з 9 грубими помилками